

FICHE 1
GÉOMÉTRIE AFFINE

Exercice 1 (Sur le concept d'alignement). Soit A, B deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$.

- Justifier l'existence de la droite affine passant par A et B , que l'on notera désormais (AB) . Comment écrit-on sa direction Δ ?
- On dit que des points de $\mathcal{E}$ sont **alignés** lorsqu'ils appartiennent à une même droite affine. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$A, B, M \text{ sont alignés } \iff M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} \in \Delta \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

- Reproduire une définition analogue de la coplanarité dans un espace affine de dimension ≥ 3 .
- Soit A, A', B, B' quatre points d'un espace affine, deux-à-deux distincts, dont on suppose qu'ils ne sont pas alignés. Montrer que

$$(AB) \parallel (A'B') \text{ et } (AA') \parallel (BB') \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

- Montrer que les applications affines préservent l'alignement.

Exercice 2 (Géométrie du triangle). 1. Soit A et B deux points distincts du plan affine $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un unique **milieu** I de ces deux points, vérifiant simultanément les équations équivalentes suivantes :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

- On considère désormais trois points non alignés A, B, C , ainsi que A', B', C' les milieux de (respectivement) B et C , A et C , A et B . En introduisant un système de coordonnées affines judicieusement choisi, montrer que les trois droites (AA') , (BB') , et (CC') sont concourantes. Le point de concours en question n'est autre que le **centre de gravité** du triangle.

- On se propose désormais de redémontrer ce résultat par des moyens élémentaires. Pour cela, montrer qu'une droite passant par C' est parallèle à (BC) si et seulement elle passe également par B' .
- Formons l'intersection G des médianes (CC') et (BB') , puis les points $C'' \in (CC')$ et $B'' \in (BB')$ tels que C' soit le milieu de G et C'' , B' celui de G et B'' . Faire un croquis, puis montrer que les droites (CB'') , (AG) , (BC'') sont parallèles.
- En considérant le triangle ACC'' , montrer que G est à la fois le milieu de C et C'' et celui de B et B'' .
- En considérant le triangle $BB''C$, montrer que (AG) passe par A' (c'est-à-dire, que c'est la troisième médiane du triangle). En déduire que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en G , et que G se situe aux deux-tiers de chacune d'elles en partant du sommet.

Exercice 3 (Sur le barycentre). Soit $(A_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ une famille de points d'un espace affine $\mathcal{E}$, $(\mu_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ une famille de scalaires réels. On appelle $(A_i, \mu_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ un **système de points pondérés**.

- En supposant que $\Lambda = \sum \mu_i \neq 0$, montrer qu'il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$\sum \mu_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Montrer que, de plus, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, on a :

$$\Lambda \cdot \overrightarrow{OG} = \sum \mu_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Ce point G est appelé **barycentre** du système. On parle d'**isobarycentre** lorsque tous les scalaires μ_i sont égaux.

- Quel est l'isobarycentre de deux points A et B ? et celui de trois points non alignés A, B, C ?
- Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. Montrer que l'image du barycentre du système $(A_i, \mu_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ est le barycentre du système $(\varphi(A_i), \mu_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$.
- Soit une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui transforme le barycentre de tout système pondéré de deux points $((A, \mu), (B, 1 - \mu))$ en celui du système $((\varphi(A), \mu), (\varphi(B), 1 - \mu))$. Montrer que φ est nécessairement une application affine.

Exercice 4 (Sous-espace engendré par deux droites). Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, dirigé par l'espace vectoriel E .

1. Déterminer le sous-espace affine engendré par deux droites affines de $\mathcal{E}$.

Rappel : On appelle **sous-espace affine engendré par une partie** $\mathcal{A}$ l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{A}$. C'est bien un sous-espace affine en vertu du résultat affirmant que l'intersection de sous-espaces affines reste un sous-espace affine.

2. Trouver l'équation cartésienne du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^4$ par les deux droites suivantes :

$$D_1 = \{(1, 0, 0, 0) + t \cdot (1, 1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(0, 1, 0, 0) + t \cdot (1, 0, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

3. On se place désormais dans $\mathbb{R}^3$ et l'on considère les droites suivantes :

$$D : \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -1 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases} ; \quad D' : \begin{cases} 11x - y - 7z = \alpha \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel.

- Déterminer en fonction de α si les droites sont parallèles, sécantes, ou non-coplanaires.
- En produisant un autre système d'équations pour D comprenant l'une des équations définissant D' , déterminer le sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^3$ par ces deux droites.

4. On considère désormais $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F et G . On note $\mathcal{T}$ le sous-espace affine engendré par leur réunion, et T la direction de ce dernier.

Montrer l'égalité suivante :

$$\forall A \in F, \forall B \in G, \quad T = F + G + \text{vect}(\overrightarrow{AB}).$$

5. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
- $\exists A \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{G} \mid \overrightarrow{AB} \in F + G$.
- $\forall A \in F, \forall B \in G, \overrightarrow{AB} \in F + G$.

6. En déduire que, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, la dimension de $\mathcal{T}$ est égale à $\dim(F + G)$.

7. En déduire que, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, la dimension de $\mathcal{T}$ est égale à $\dim(F + G) + 1$.

Exercice 5 (Sur les symétries). 1. Soit E un espace vectoriel, dont F, G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ; c'est-à-dire que l'on a :

$$E = F \oplus G.$$

Ainsi, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = f + g$, où $f \in F$ et $g \in G$. On peut donc définir la symétrie (vectorielle) s_F dans la direction de G et par rapport à F de la manière suivante :

$$s_F(u + v) = u - v.$$

Montrer que c'est un endomorphisme de E , et que c'est une involution.

2. Soit désormais $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E , $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par F , et G un sous-espace vectoriel de E supplémentaire avec F . On fixe un point $O \in \mathcal{F}$, et on définit l'application σ via la relation suivante :

$$\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{O\sigma(M)} = s_F(\overrightarrow{OM}).$$

Montrer que cela définit bien une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, et que l'on a toujours :

$$\overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM}) \iff \overrightarrow{O'M'} = s_F(\overrightarrow{O'M}).$$

3. Montrer que σ est une application affine et qu'elle ne dépend pas du choix de O . On appellera cette application **symétrie affine** par rapport à $\mathcal{F}$ et dans la direction de G .
4. Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$, dont l'application linéaire associée f est une symétrie (vectorielle). Montrer que φ s'écrit de façon unique comme composée d'une symétrie affine σ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur fixé par f .