

FEUILLE D'EXERCICES 4 : ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . Si c'est le cas, préciser la norme associée et écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(1) Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 1$, pour tout $P, Q \in E$,

(a) $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$

(e) $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^n P(k)Q(k)$

(b) $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx$

(f) $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$

(c) $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx$

(d) $\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x) e^{-x^2} dx$

(2) Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, pour tout $A, B \in E$,

(a) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

(b) $\langle A, B \rangle = \det(A^T B)$

Exercice 2. Soient E un espace euclidien, A et B deux parties de E , F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On rappelle que l'orthogonal d'une partie A est l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, x \perp a\}.$$

Montrer les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

(3) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

(5) $(F^\perp)^\perp = F$.

(2) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

(4) $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

Exercice 3. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est injectif et préserve l'orthogonalité : pour tout $x, y \in E$, si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$.

(1) Montrer que pour tout $i \neq j$, $\langle u(\mathbf{e}_i) + u(\mathbf{e}_j), u(\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{e}_j) \rangle = 0$.

(2) En déduire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\|u(\mathbf{e}_i)\| = \|u(\mathbf{e}_j)\|$. On note λ cette valeur commune. Justifier que λ est non nul.

(3) Montrer que pour tout $\mathbf{x} \in E$, $\|u(\mathbf{x})\| = \lambda \|\mathbf{x}\|$. (On dit que f est une *similitude*.)

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. À partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5.

- (1) Soit E un espace euclidien. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un *projecteur*, c'est-à-dire que $p \circ p = p$. Montrer que p est une *projection orthogonale* si et seulement si p est *symétrique*.
- (2) *Exemple.* Montrer que la matrice

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une projection orthogonale p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera le noyau et l'image.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

- (1) Montrer que $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im}(A^T)$ et $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.
- (2) Montrer que A et A^T ont même rang.
- (3) Montrer que $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker } A$.
- (4) Montrer que $\text{Im}(A^T A) = \text{Im}(A^T)$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée. On considère le sous-espace vectoriel

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}.$$

- (1) Déterminer la dimension et une base orthonormée de G .
- (2) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, donner une expression explicite de la *distance* de $\mathbf{x}$ à G , définie par

$$d(\mathbf{x}, G) = \inf_{\mathbf{y} \in G} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(M, N) \in E^2 \mapsto \langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N).$$

On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) Déterminer une base orthonormée de F .
- (2) Calculer le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 9. On veut calculer la quantité suivante :

$$\delta = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

- (1) Justifier que δ est bien défini.
- (2) Exprimer δ comme la distance à un sous-espace vectoriel dans un espace euclidien bien choisis.
- (3) Calculer δ .

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer qu'il existe un unique $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 H_n(x) P(x) dx = P'(1)$$

- (2) Calculer H_2 .

Exercice 11. Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire. Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes *symétriques* de E tels que

- la somme de leurs rangs vaut n : $\text{rg } u_1 + \dots + \text{rg } u_p = n$,
- pour tout $x \in E$, $\langle u_1(x), x \rangle + \dots + \langle u_p(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$.

- (1) Montrer que $E = \text{Im } u_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } u_p$.
- (2) Montrer que, pour tout $k \llbracket 1, p \rrbracket$, u_k est une projection orthogonale.
- (3) Montrer que les sous-espaces $\text{Im } u_k$ sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

- (1) Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
- (2) Si p n'est pas une projection orthogonale, construire $x_0 \in E$ tel que $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$. (Faire un dessin.)

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$. On note $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\mathbf{x}\| = 1\}$ la *sphère unité*, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices *symétriques* et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices *antisymétriques*. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la fonction suivante :

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

- (1) (a) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et écrire la décomposition correspondante de toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera S_A sa partie symétrique.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f_A = f_{S_A}$.
- (2) Dans la suite de l'exercice, on fixe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (a) Montrer que f_A est bornée et atteint ses bornes sur $\mathbb{S}$.
- (b) On note $\lambda_{\min}$ la plus petite et $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de A . Montrer que

$$\lambda_{\min} = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}} f_A(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}} f_A(\mathbf{x})$$

- (3) Dans cette question, on suppose de plus que A est définie positive, c'est-à-dire que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.
 - (a) Montrer que $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f_A(\mathbf{x}) = +\infty$.
 - (b) On note $\Sigma_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\mathbf{x}) = 1\}$. Montrer que Σ_A est non vide, fermé et borné dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$.
- (4) *Application.* On définit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$ et on note $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S} ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
 - (a) Soit M la matrice dont les coefficients $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)$ valent 1 et les autres valent 0. Montrer que $h = f_M$, que $M^n = I_n$ et que $M^T = M^{n-1} = M^{-1}$.
 - (b) Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et calculer ses valeurs propres. On note $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ une base (dans $\mathbb{C}^n$) de vecteurs propres de M .
 - (c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu en prenant la partie réelle de $\mathbf{v}_k$ est un vecteur propre de S_M , et donner la valeur propre associée.
 - (d) Montrer que h est majorée sur V , qu'elle atteint son maximum sur V et calculer ce maximum.