

**FEUILLE D'EXERCICES 3 :
FORMES QUADRATIQUES**

Exercice 1. Décomposer en sommes et/ou différences de carrés de formes linéaires indépendantes, par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes :

$$q_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy,$$

$$q_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2xy - 2yz,$$

$$q_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto 3x^2 + 4y^2 + 15z^2 - 2t^2 + 6xy + 8yz - 2zt,$$

$$q_4 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto xy + yz + zx - ty + 2tz + 3tx.$$

En déduire le rang et la signature de ces formes quadratiques.

Exercice 2. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_2x_3 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

- (1) Déterminer la signature de q .
- (2) Déterminer une base orthogonale pour q .

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. On considère la forme quadratique q sur E définie pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ par :

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire f_q de q et préciser la matrice de q dans la base $\underline{e}$.
- (2) Déterminer la signature et le rang de q . La forme q est-elle dégénérée ?
- (3) Déterminer une base $\underline{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ de E orthogonale pour f_q , et préciser l'expression de $q(\mathbf{x})$ dans cette base pour tout $\mathbf{x} \in E$.
- (4) Déterminer une base du noyau de q et trouver un vecteur $\mathbf{y} \in E$ isotrope pour q .

Exercice 4. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ définie par :

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, q(z_1, z_2, z_3) = -z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 + 2iz_1z_2 + 2z_1z_3 + 2(1-i)z_2z_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire de q et la matrice associée M dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
- (2) Montrer que M est congruente à la matrice identité.
- (3) Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes par la méthode de Gauss.
- (4) Déterminer une base q -orthogonale.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E . Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E . On note $F^\perp$ l'orthogonal de F relativement à f . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la restriction de f à $F \times F$ est non dégénérée ;
- (ii) $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- (iii) $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On définit pour tous $P, Q \in E$,

$$f(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(-t)dt \quad \text{et} \quad q(P) = f(P, P).$$

- (1) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
- (2) Montrer que f est non dégénérée.
- (3) On note $F_0 = \{P \in E; \forall t \in \mathbb{R}, P(t) = P(-t)\}$ et $F_1 = \{P \in E; \forall t \in \mathbb{R}, P(t) = -P(-t)\}$ les sous-espaces vectoriels de E constitués respectivement des polynômes pairs et des polynômes impairs.
 - (a) Montrer que q est définie positive sur F_0 et définie négative sur F_1 .
 - (b) Montrer que $(F_0)^\perp = F_1$ et $(F_1)^\perp = F_0$ (où l'on considère les orthogonaux pour f).
 - (c) Déterminer les dimensions de F_0 et F_1 en fonction de n .
- (4) En utilisant la question (3)(c), déterminer la signature de q .

Exercice 7. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\underline{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ où :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(A, B) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)).$$
 - (a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
 - (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\underline{E}$.
 - (c) Montrer que f est non dégénérée.
- (2) (a) Rappeler pourquoi on a, pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$
 - (b) Dédire de (a) que la forme quadratique q associée à f est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad q(A) = \det(A).$$
 - (c) Dédire de ce qui précède la relation : pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$$
 - (d) Quel est le cône isotrope de q ?
 - (e) Déterminer le rang de q , sa signature, et une base q -orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (f) Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.
 - (i) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F pour f .
 - (ii) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$?

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, et $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base de E . On considère u l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\underline{e}$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient p et q les deux formes bilinéaires sur E définies par leurs matrices respectives S et T dans la base $\underline{e}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer le rang de p et celui de q .

- (2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,
- $$p(u(x), y) = q(x, y) = p(x, u(y)),$$
- (3) Déterminer les valeurs propres de u et montrer que u est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- (4) Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour p et pour q .
- (5) Déterminer une base de E orthogonale à la fois pour p et q .

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, et $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base de E . On considère q la forme quadratique définie sur E pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ par :

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire f de q et préciser la matrice M de f dans la base $\underline{e}$.
- (2) La forme f est-elle dégénérée ? Quel est son rang ?
- (3) Déterminer une base de E qui soit f -orthogonale et préciser l'expression de $q(\mathbf{x})$ en fonction des composantes de $\mathbf{x}$ dans cette base pour tout $\mathbf{x} \in E$.
- (4) Déterminer une base de $E^\perp$ (le noyau de f). En déduire un vecteur de E isotrope pour f .
- (5) Soit $g: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E . On note G sa matrice dans la base $\underline{e}$.

Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$f(x, y) = g(u(x), y).$$

Exprimer la matrice A de u dans la base $\underline{e}$ en fonction des matrices M et G .

Exercice 10 (Groupe orthogonal associé à une forme quadratique).

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $\underline{e}$ une base de E . Soit $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée sur E et $f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ la forme polaire de q .

On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble

$$O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) ; \forall x \in E, q(u(x)) = q(x)\}$$

- (1) Soit $u \in O(q)$.
- (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$.
- (b) On note A et Q respectivement les matrices de u et q dans la base $\underline{e}$. Écrire une relation satisfaite par A et Q .
- (c) Montrer que le déterminant de u vaut 1 ou -1 .
- (2) Montrer que $O(q)$ est un groupe. On l'appelle le *groupe orthogonal* de q .
- (3) *Deux exemples.* Déterminer $O(q)$ pour les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \mapsto 2x_1x_2,$$

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2.$$

- (4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \text{id}$.
- (a) En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $E = \text{Ker}(u + \text{id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{id})$.
- (b) Montrer que $u \in O(q)$ si et seulement si $\text{Ker}(u + \text{id})$ et $\text{Ker}(u - \text{id})$ sont f -orthogonaux.
- (c) On suppose que $u \in O(q)$. Montrer que $\text{Im}(u - \text{id}) = (\text{Ker}(u - \text{id}))^\perp$ et $\text{Im}(u + \text{id}) = (\text{Ker}(u + \text{id}))^\perp$ (l'orthogonal pour f).
- (d) On suppose que $u \in O(q)$. Montrer que :

$$E = \text{Im}(u - \text{id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}) = \text{Im}(u + \text{id}) \oplus \text{Ker}(u + \text{id}) = \text{Im}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u + \text{id}).$$