

**FEUILLE D'EXERCICES 2 :
FORMES BILINÉAIRES**

Exercice 1. On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f_1 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto x_1 y_2, \\f_2 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1, \\f_3 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2, \\f_4 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (x_1 + x_2)(y_1 + y_2),\end{aligned}$$

avec les notations $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

- (1) Montrer que ce sont toutes des formes bilinéaires.
- (2) Déterminer celles qui sont symétriques ou antisymétriques.
- (3) Écrire leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et calculer leur rang.
- (4) Déterminer leur noyau à gauche (c'est-à-dire $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$) et leur noyau à droite (c'est-à-dire $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$).
- (5) Déterminer leur cône isotrope (c'est-à-dire $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; f_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}$).

Exercice 2. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 6x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2$$

pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

- (1) Montrer que f est une forme bilinéaire et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Calculer le rang de f .
- (3) Calculer $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pour $\mathbf{x} = (2, -1, 0)$ et $\mathbf{y} = (5, 15, 1)$. Quelle est la signification de ce résultat ?
- (4) Écrire la matrice de f dans la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, où $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E telle que 0 soit le seul vecteur isotrope pour f (c'est-à-dire le seul vecteur $\mathbf{x}$ vérifiant $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$). Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad f(u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Montrer que u est linéaire et injective.

Solution. Pour la linéarité, on fixe¹ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$. On veut montrer que

$$\mathbf{y} = u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) - u(\mathbf{x}_1) - \lambda_2 u(\mathbf{x}_2)$$

est nul. Pour cela, on montre qu'il est dans le cône isotrope de f : on commence par développer grâce à la bilinéarité de f (égalité (1)), puis on constate que l'hypothèse que u est une isométrie

1. Il serait plus symétrique de mettre un coefficient λ_1 devant $\mathbf{x}_1$ mais cela fait des égalités trop larges... De toute façon, ce n'est pas nécessaire pour démontrer la linéarité.

de f permet de supprimer toute trace de u (égalité (2)), ce qui permet de factoriser (égalité (3)) : on lit l'égalité (1) à l'envers avec id_E à la place de u :

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) &= f(u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) - u(\mathbf{x}_1) - \lambda_2 u(\mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) - u(\mathbf{x}_1) - \lambda_2 u(\mathbf{x}_2)) \\
 &\stackrel{(1)}{=} f(u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2)) - f(u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_1)) - \lambda_2 f(u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_2)) \\
 &\quad - f(u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2)) + f(u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_1)) + \lambda_2 f(u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2)) \\
 &\quad - \lambda_2 f(u(\mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2)) + \lambda_2 f(u(\mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_1)) + \lambda_2^2 f(u(\mathbf{x}_2), u(\mathbf{x}_2)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} f(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) - \lambda_2 f(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \\
 &\quad - f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) + f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
 &\quad - \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \lambda_2^2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \\
 &\stackrel{(3)}{=} f(\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 - \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 - \lambda_2 \mathbf{x}_2) \\
 &= f(0, 0) = 0.
 \end{aligned}$$

Comme le cône isotrope de f est trivial, cela montre que $y = 0$ et la linéarité de u en résulte. L'injectivité de u est facile : si $\mathbf{x}$ est dans le noyau de u , on a

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})) = f(0, 0) = 0,$$

de sorte que $\mathbf{x} = 0$. □

Remarque (variante). À partir de l'égalité (2), on peut continuer à développer au lieu de factoriser :

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + 2\lambda_2 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \lambda_2^2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) - \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) - \lambda_2 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \lambda_2^2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \\
 &\quad - f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) - \lambda_2 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
 &\quad - \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) - \lambda_2^2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \lambda_2^2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Remarque. L'hypothèse sur le cône isotrope de f n'est que rarement satisfaite. En effet :

- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, elle signifie que f est un produit scalaire euclidien ou l'opposé d'un produit scalaire euclidien ; l'hypothèse sur u signifie que u est une isométrie ;
- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle signifie que E est de dimension 1.

On pourra s'amuser à démontrer ces propriétés plus tard avec quelques ingrédients supplémentaires : sur $\mathbb{C}$, il est commode de savoir que toute forme quadratique admet une base orthogonale ; sur $\mathbb{R}$, il est commode de pouvoir parler de signature.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls et φ la forme linéaire sur E définie par :

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \alpha_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On considère $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y})$.

- (1) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E .
- (2) Quelle est la matrice de f dans la base $\underline{\mathbf{e}}$?
- (3) Quel est le rang de f ?
- (4) Déterminer l'orthogonal de E relativement à f (c'est-à-dire $\{\mathbf{x} \in E ; \forall \mathbf{y} \in E, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$).

Exercice 5. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\Psi \in \mathcal{L}(E; F)$ (l'espace des applications linéaires de E dans F). Soient $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$ des bases de E et F respectivement, $\underline{\mathbf{u}}^*$ et $\underline{\mathbf{v}}^*$ leurs bases duales. On note $\text{Mat}_{\underline{\mathbf{v}}\underline{\mathbf{u}}} \Psi$ la matrice de Ψ dans les bases $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$. L'application *transposée* de Ψ est définie par

$$\begin{aligned}
 \Psi^T : F^* &\longrightarrow E^* \\
 \varphi &\longmapsto \varphi \circ \Psi
 \end{aligned}$$

- (1) Montre que Ψ^T est une application linéaire.
- (2) Comment peut-on caractériser cette application transposée à l'aide des crochets de dualité ?
- (3) Montrer que

$$\text{Mat}_{\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*} \Psi^T = (\text{Mat}_{\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}} \Psi)^T,$$

où le membre de droite est la transposée de la matrice de Ψ .

Solution.

Remarque. La situation se comprend très bien en suivant les flèches sur le diagramme ci-dessous : étant donné une forme linéaire $\varphi : F \rightarrow \mathbb{K}$, comment lui associer une forme linéaire $\Psi^T(\varphi) : E \rightarrow \mathbb{K}$?

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & F \\ & \searrow \Psi^T(\varphi) = \varphi \circ \Psi & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{K} \end{array} \qquad F^* \xleftarrow{\Psi^T} E^*$$

Remarquer la situation de miroir : quand on dualise, les espaces sont remplacés par leur dual et les applications linéaires par leur transposée, qui va « en sens inverse ».

- (1) Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in F^*$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Alors, par définition d'une combinaison linéaire de deux applications, on a² :

$$\Psi^T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \circ \Psi = \lambda_1 \varphi_1 \circ \Psi + \lambda_2 \varphi_2 \circ \Psi = \lambda_1 \Psi^T(\varphi_1) + \lambda_2 \Psi^T(\varphi_2).$$

- (2) Comme on a deux espaces, on a deux crochets de dualité, qui proviennent de l'évaluation des formes linéaires :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E^* \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (\theta, \mathbf{x}) \mapsto \theta(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_F : F^* \times F \rightarrow \mathbb{K}, \quad (\varphi, \mathbf{y}) \mapsto \varphi(\mathbf{y}).$$

L'application Ψ^T est déterminée par les images $\Psi^T(\varphi)$ pour $\varphi \in F^*$, lesquelles sont des applications de E dans $\mathbb{K}$, déterminées par les images $\Psi^T(\varphi)(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in E$:

$$\langle \Psi^T(\varphi), \mathbf{x} \rangle_E = \Psi^T(\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi \circ \Psi(\mathbf{x}) = \langle \varphi, \Psi(\mathbf{x}) \rangle_F.$$

En omettant les intermédiaires, on peut dire que Ψ^T est caractérisée par la condition

$$\forall \varphi \in F^*, \forall \mathbf{x} \in E, \quad \langle \Psi^T(\varphi), \mathbf{x} \rangle_E = \langle \varphi, \Psi(\mathbf{x}) \rangle_F.$$

(Autrement dit, si $\Phi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, on a $\Phi = \Psi^T$ si et seulement si $\langle \Phi(\varphi), \mathbf{x} \rangle_E = \langle \varphi, \Psi(\mathbf{x}) \rangle_F$ pour tout $\mathbf{x}$ et tout φ .)

- (3) Soit $n = \dim E$, $p = \dim F$, $\underline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{u}_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq p}$. On écrit la matrice

$$\text{Mat}_{\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}}(\Psi) = A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad \text{i.e. } \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \Psi(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \mathbf{v}_i.$$

Bien sûr, en regardant la i -ème coordonnée, c'est-à-dire en appliquant $\mathbf{v}_i^*$, il vient :

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i^*, \Psi(\mathbf{u}_j) \rangle.$$

À présent, on note

$$\text{Mat}_{\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*}(\Psi^T) = B = (b_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}, \quad \text{i.e. } \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \Psi^T(\mathbf{v}_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \mathbf{u}_j^*.$$

Fixons $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq p$: pour calculer b_{ji} , on évalue cette forme linéaire en $\mathbf{u}_j$:

$$b_{ji} = \langle \Psi^T(\mathbf{v}_i^*), \mathbf{u}_j \rangle.$$

En comparant les expressions de a_{ij} et de b_{ji} à la lumière de la question précédente, on voit qu'ils sont égaux. Autrement dit, $B = A^T$, comme annoncé. $\square$

2. Par définition, si $\mathbf{y} \in F$, on a $(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(\mathbf{y}) = \lambda_1 \varphi_1(\mathbf{y}) + \lambda_2 \varphi_2(\mathbf{y})$. Si $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$ est l'image d'un élément quelconque $\mathbf{x}$ de E par Ψ , cela signifie que $(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \circ \Psi(\mathbf{x}) = \lambda_1 \varphi_1 \circ \Psi(\mathbf{x}) + \lambda_2 \varphi_2 \circ \Psi(\mathbf{x})$ et, puisque $\mathbf{x}$ est quelconque, que $(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \circ \Psi = \lambda_1 \varphi_1 \circ \Psi + \lambda_2 \varphi_2 \circ \Psi$.

Remarque. On peut remarquer que b_{ji} est le coefficient de $\Psi^T(\mathbf{v}_i^*)$ dans la base $\underline{\mathbf{u}}^*$ et qu'évaluer en $\mathbf{u}_j$, c'est la même chose qu'appliquer $\mathbf{u}_j^{**}$, le i -ème vecteur de la base duale de $\underline{\mathbf{u}}^*$, après identification de E^{**} avec E et de $\mathbf{u}_j^{**}$ avec $\mathbf{u}_j$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\text{Bil}(E \times E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Bil}(E \times E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E; E^*) & \text{où } \Psi(f) : E &\longrightarrow E^* \\ f &\longmapsto \Psi(f) & \mathbf{y} &\longmapsto (f_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

- (1) Justifier que Ψ est bien définie.
- (2) Montrer que Ψ est une application linéaire inversible.
- (3) Soit $\mathbf{e}$ une base de E . Montrer que pour tout $f \in \text{Bil}(E \times E)$:

$$\text{Mat}_{\mathbf{e}} f = \text{Mat}_{\mathbf{e}^* \mathbf{e}} \Psi(f).$$

On rappelle que $\text{Mat}_{\mathbf{e}} f = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ si $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

- (4) Soit $\mathbf{e}'$ une autre base de E . Dédurre des questions précédentes que

$$\text{Mat}_{\mathbf{e}'} f = (\text{Mat}_{\mathbf{e}'} \text{Id}_E)^T (\text{Mat}_{\mathbf{e}} f) (\text{Mat}_{\mathbf{e} \mathbf{e}'} \text{Id}_E).$$

Solution.

Remarque (préliminaire). Avant d'entrer dans le linéaire, rappelons cette histoire d'applications partielles. On se donne deux ensembles E et F et on considère l'ensemble $\mathbb{K}^{E \times F}$ des applications de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$ – dans l'exercice, $E = F$ est un espace vectoriel et on impose des conditions de (bi)linéarité. Pour $y \in F$, on a une application partielle $f_y : E \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x, y)$. Se donner f , c'est équivalent à se donner toutes les f_y ($y \in F$). Plus formellement, l'application qui à f associe l'application $y \mapsto f_y$ est une bijection Ψ de $\mathbb{K}^{E \times F}$ sur l'ensemble $(\mathbb{K}^E)^F$ des applications de F dans $\mathbb{K}^E$ (où $\mathbb{K}^E$ est l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{K}$). En effet, étant donné une application $g : F \rightarrow \mathbb{K}^E$, on lui associe $f = \Theta(g)$ par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad f(x, y) = g(y)(x).$$

Vérifions que $\Psi : \mathbb{K}^{E \times F} \rightarrow (\mathbb{K}^E)^F$ et $\Theta : (\mathbb{K}^E)^F \rightarrow \mathbb{K}^{E \times F}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $f \in \mathbb{K}^{E \times F}$ et soit $g = \Psi(f)$, c'est-à-dire que $g(y) = f_y$ pour tout $y \in F$. Alors $\Theta(g)$ est la fonction qui à (x, y) associe $g(y)(x) = f_y(x) = f(x, y)$. Autrement dit, $\Theta \circ \Psi(f) = f$.

Inversement, soit $g \in (\mathbb{K}^E)^F$ et soit $f = \Theta(g)$, c'est-à-dire que $f(x, y) = g(y)(x)$ pour tout $(x, y) \in E \times F$. Alors $\Psi(f)$ associe à y l'application partielle $f_y : x \mapsto f(x, y) = g(y)(x)$, c'est-à-dire que $\Psi(f)(y) = g(y)$ pour tout y . Autrement dit, $\Psi \circ \Theta(g) = \Psi(f) = g$.

On a ainsi deux applications naturelles entre $\mathbb{K}^{E \times F}$ et $(\mathbb{K}^E)^F$. Dans l'exercice, on se restreint au cas où $E = F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, du côté gauche aux applications bilinéaires et du côté droit à des applications linéaires (en $\mathbf{y}$) et à valeurs dans E^* (dont les éléments sont des applications linéaires).

- (1) Soit $f \in \text{Bil}(E \times E)$. Pour $\mathbf{y} \in E$, l'application $f_{\mathbf{y}} : E \rightarrow \mathbb{K}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est bien linéaire puisque f est bilinéaire à gauche. Cela signifie que $f_{\mathbf{y}}$ est bien dans E^* . De plus, $\Psi(f) : \mathbf{y} \mapsto f_{\mathbf{y}}$ est linéaire. En effet, pour $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in E$ et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$, $f_{\mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2} = f_{\mathbf{y}_1} + \lambda_2 f_{\mathbf{y}_2}$ par bilinéarité de f à droite : pour tout $\mathbf{x} \in E$,

$$f_{\mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = f_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_{\mathbf{y}_2}(\mathbf{x}) = (f_{\mathbf{y}_1} + \lambda_2 f_{\mathbf{y}_2})(\mathbf{x}).$$

Cela montre que $\Psi(f)$ est bien une application linéaire de E dans E^* . Ainsi, Ψ est bien définie.

- (2) Pour la linéarité de Ψ , soient $f_1, f_2 \in \text{Bil}(E \times E)$ et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$. On a, pour $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in E$:

$$\begin{aligned}\Psi(f_1 + \lambda_2 f_2)(\mathbf{y})(\mathbf{x}) &= (f_1 + \lambda_2 f_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\Psi(f_1) + \lambda_2 \Psi(f_2))(\mathbf{y})(\mathbf{x}) &= \Psi(f_1)(\mathbf{y})(\mathbf{x}) + \lambda_2 \Psi(f_2)(\mathbf{y})(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{x}$ est quelconque, on a $\Psi(f_1 + \lambda_2 f_2)(\mathbf{y}) = \Psi(f_1)(\mathbf{y}) + \lambda_2 \Psi(f_2)(\mathbf{y})$ et comme $\mathbf{y}$ est quelconque, il vient $\Psi(f_1 + \lambda_2 f_2) = \Psi(f_1) + \lambda_2 \Psi(f_2)$. Cela assure que Ψ est linéaire.

Pour l'inversibilité, on utilise la même application que dans la remarque préliminaire, à savoir :

$$\begin{array}{ccc} \Theta : \mathcal{L}(E, E^*) & \longrightarrow & \text{Bil}(E \times E) \quad \text{où} \quad \Theta(g) : E \times E \longrightarrow \mathbb{K} \\ g & \longmapsto & \Theta(g) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto g(\mathbf{y})(\mathbf{x}) = \langle g(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle. \end{array}$$

Soit $f \in \text{Bil}(E \times E)$, notons $g = \Psi(f)$. Alors, pour $\mathbf{y} \in E$ et $\mathbf{x} \in E$, on a $g(\mathbf{y})(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Il en résulte immédiatement que $\Theta(g) = f$. Autrement dit, $\Theta \circ \Psi(f) = f$.

Inversement, soit $g \in \mathcal{L}(E, E^*)$ et soit $f = \Theta(g)$. Alors, pour $y \in E$, l'application $\Psi(f)(\mathbf{y})$ est $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y})(\mathbf{x})$, ce qui exprime que $\Psi(f) = g$. Autrement dit, $\Psi \circ \Theta(g) = g$.

- (3) On note $n = \dim E$ et $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- le coefficient d'indice (i, j) de $\text{Mat}_{\mathbf{e}} f$ est $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$;
 - le coefficient d'indice (i, j) de $\text{Mat}_{\mathbf{e}^*, \mathbf{e}} \Psi(f)$, disons b_{ij} , est le coefficient de $\mathbf{e}_i^*$ dans la décomposition

$$\Psi(f)(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \mathbf{e}_k^*,$$

que l'on calcule en évaluant cette expression en $\mathbf{e}_i$:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \mathbf{e}_k^*(\mathbf{e}_i) = \Psi(f)(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Autrement dit, les matrices $\text{Mat}_{\mathbf{e}} f$ et $\text{Mat}_{\mathbf{e}^*, \mathbf{e}} \Psi(f)$ sont bien égales.

- (4) Les questions précédentes permettent de chercher $\text{Mat}_{\mathbf{e}'} f$ comme la matrice d'une application linéaire via un changement de base « comme en L1 ». Rappelons que la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$ a pour j -ème colonne la colonne des coordonnées de $\mathbf{e}_j$ dans la base $\mathbf{e}$: c'est donc ³

$$P = \text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}(\text{Id}).$$

On se convainc facilement que la transposée de l'identité est l'identité ($\varphi \circ \text{Id} = \varphi$ pour tout $\varphi \in E^*$) d'où, par la question 3 de l'exercice 5, la relation $\text{Mat}_{\mathbf{e}^*, \mathbf{e}'}(\text{Id}) = \text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}(\text{Id})^T = P^T$. À présent, on fixe $f \in \text{Bil}(E, E)$ et on suit le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} \text{(base } \mathbf{e}) & E & \xrightarrow{\Psi(f)} & E^* & \text{(base } \mathbf{e}^*) \\ & \uparrow \text{Id} & & \downarrow \text{Id} & \\ \text{(base } \mathbf{e}') & E & \xrightarrow{\Psi(f)} & E^* & \text{(base } \mathbf{e}'^*) \end{array}$$

Comme la matrice de la composée est le produit des matrices, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathbf{e}'} f &= \text{Mat}_{\mathbf{e}'^*, \mathbf{e}'} \Psi(f) \\ &= (\text{Mat}_{\mathbf{e}'^*, \mathbf{e}^*} \text{Id})(\text{Mat}_{\mathbf{e}^*, \mathbf{e}} \Psi(f))(\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} \text{Id}) \\ &= (\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} \text{Id})^T (\text{Mat}_{\mathbf{e}} f) (\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} \text{Id}) \\ \text{soit } \text{Mat}_{\mathbf{e}'} f &= P^T (\text{Mat}_{\mathbf{e}} f) P. \quad \square\end{aligned}$$

3. Attention à la convention plutôt inhabituelle pour la matrice d'une application linéaire $\psi : E \rightarrow F$: la première base qui apparaît en indice est une base de l'espace d'arrivée F , la deuxième de l'espace de départ E .

Remarque. Bien sûr, la relation que l'on vient de montrer,

$$A' = P^T A P,$$

est plus facile à vérifier en partant de l'expression de f en termes des colonnes de coordonnées X et Y de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans E , à savoir

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T A Y,$$

et en utilisant la formule de changement de base, c'est-à-dire en remplaçant $X = P X'$ et $Y = P Y'$, ce qui donne

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (P X')^T A (P Y') = X'^T P^T A P Y'$$

et la relation $A' = P^T A P$ en découle aussitôt.

Cependant, l'exercice donne une interprétation de la formule de changement de base pour une forme *bilinéaire* comme une formule de changement de base pour une application *linéaire*, cf. la classique formule $A' = Q^{-1} A P$ de L1.

Remarque. La partie la plus utile de l'exercice est cependant la première, l'identification des applications linéaires de E dans E^* aux formes bilinéaires. Celle-ci sera réutilisée au S6 pour comprendre la différentielle seconde dans l'étude des fonctions à plusieurs variables. Donnons-nous une fonction $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{E}$ est un ouvert de (l'espace affine) $\mathbb{R}^n$. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. La *différentielle* de F en un point p de $\mathcal{E}$ est, si elle existe, l'unique application linéaire dF_p de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour $h \in E$ au voisinage de 0,

$$F(p+h) = F(p) + dF_p(h) + o(\|h\|),$$

où $\|\cdot\|$ est une norme fixée sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $dF_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ et la différentielle

$$dF : \mathcal{E} \longrightarrow E^*, p \longmapsto dF_p$$

est une application de $\mathcal{E}$ dans E^* . Plus généralement, si $F : \mathcal{E} \rightarrow E'$ est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E' , sa différentielle en p est une application linéaire de E dans E' .

La *différentielle seconde* de $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ en p est la différentielle de $dF : \mathcal{E} \rightarrow E^*$, $p \mapsto dF_p$. Vu la dernière remarque, appliquée à $E' = E^*$, c'est donc une application

$$d^2 F_p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}(E, E^*).$$

Il est très pertinent d'identifier la différentielle à une forme bilinéaire sur $E \times E$, encore notée $d^2 F_p$, par exemple pour écrire un développement de Taylor d'ordre deux : « sous de bonnes hypothèses sur F », on a pour h au voisinage de 0 dans E

$$F(p+h) = F(p) + dF_p(h) + \frac{1}{2} d^2 F_p(h, h) + o(\|h\|^2).$$