

**FEUILLE D'EXERCICES 2 :
FORMES BILINÉAIRES**

Exercice 1. On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f_1 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto x_1 y_2, \\f_2 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1, \\f_3 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2, \\f_4 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (x_1 + x_2)(y_1 + y_2),\end{aligned}$$

avec les notations $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

- (1) Montrer que ce sont toutes des formes bilinéaires.
- (2) Déterminer celles qui sont symétriques ou antisymétriques.
- (3) Écrire leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et calculer leur rang.
- (4) Déterminer leur noyau à gauche (c'est-à-dire $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$) et leur noyau à droite (c'est-à-dire $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$).
- (5) Déterminer leur cône isotrope (c'est-à-dire $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; f_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}$).

Exercice 2. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 6x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2$$

pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

- (1) Montrer que f est une forme bilinéaire et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Calculer le rang de f .
- (3) Calculer $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pour $\mathbf{x} = (2, -1, 0)$ et $\mathbf{y} = (5, 15, 1)$. Quelle est la signification de ce résultat ?
- (4) Écrire la matrice de f dans la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, où $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E telle que 0 soit le seul vecteur isotrope pour f (c'est-à-dire le seul vecteur $\mathbf{x}$ vérifiant $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$). Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad f(u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Montrer que u est linéaire et injective.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls et φ la forme linéaire sur E définie par :

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \alpha_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On considère $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y})$.

- (1) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E .
- (2) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathbf{e}$?
- (3) Quel est le rang de f ?
- (4) Déterminer l'orthogonal de E relativement à f (c'est-à-dire $\{\mathbf{x} \in E; \forall \mathbf{y} \in E, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$).

Exercice 5. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\Psi \in \mathcal{L}(E; F)$ (l'espace des applications linéaires de E dans F). Soient $\underline{u}$ et $\underline{v}$ des bases de E et F respectivement, $\underline{u}^*$ et $\underline{v}^*$ leurs bases duales. On note $\text{Mat}_{\underline{v}\underline{u}} \Psi$ la matrice de Ψ dans les bases $\underline{u}$ et $\underline{v}$. L'application *transposée* de Ψ est définie par

$$\begin{aligned} \Psi^T : F^* &\longrightarrow E^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \Psi \end{aligned}$$

- (1) Montre que Ψ^T est une application linéaire.
- (2) Comment peut-on caractériser cette application transposée à l'aide des crochets de dualité ?
- (3) Montrer que

$$\text{Mat}_{\underline{u}^*\underline{v}^*} \Psi^T = (\text{Mat}_{\underline{v}\underline{u}} \Psi)^T,$$

où le membre de droite est la transposée de la matrice de Ψ .

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\text{Bil}(E \times E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Bil}(E \times E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E; E^*) \\ f &\longmapsto \Psi(f) : \mathbf{y} \in E \longmapsto (\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

- (1) Justifier que Ψ est bien définie.
- (2) Montrer que Ψ est une application linéaire inversible.
- (3) Soit $\underline{e}$ une base de E . Montrer que pour tout $f \in \text{Bil}(E \times E)$:

$$\text{Mat}_{\underline{e}} f = \text{Mat}_{\underline{e}^*\underline{e}} \Psi(f).$$

On rappelle que $\text{Mat}_{\underline{e}} f = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ si $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

- (4) Soit $\underline{e}'$ une autre base de E . Dédurre des questions précédentes que

$$\text{Mat}_{\underline{e}'} f = (\text{Mat}_{\underline{e}\underline{e}'} \text{Id}_E)^T (\text{Mat}_{\underline{e}} f) (\text{Mat}_{\underline{e}\underline{e}'} \text{Id}_E).$$