

Feuille d'exercices 1 : dualité en dimension finie

Exercice 4 (Orthogonal au sens de la dualité). 2. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, -2, 2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 4, -3, 4, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 3, -1, -2, 9).$$

- (a) Déterminer la dimension de F . Quelle est la dimension de $F^\perp$?
(b) Déterminer une base de $F^\perp$ dans $(\mathbb{R}^5)^*$.

Solution. (a) Il s'agit de trouver le rang de la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, qui est aussi celui de la matrice suivante, dans laquelle on écrit les colonnes de coordonnées des vecteurs dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Première version : on applique l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes (ce n'est pas le plus efficace mais on retrouvera ces calculs plus bas). En numérotant $L_1, \dots, L_5$ les lignes de A , on calcule :

$$\begin{aligned} \text{rg } A &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \begin{cases} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 - 3L_1 \\ L'_3 = L_3 + 2L_1 \\ L'_4 = L_4 - 2L_1 \\ L'_5 = L_5 - 3L_1 \end{cases} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \begin{cases} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = L'_2 \\ L''_3 = L'_3 + L'_2 \\ L''_4 = L'_4 - 2L'_2 \\ L''_5 = L'_5 + L'_2 \end{cases} \\ &= 2 && \text{(matrice échelonnée en lignes).} \end{aligned}$$

Deuxième version : on fait de même sur les colonnes (notées C_1, C_2, C_3) :

$$\begin{aligned} \text{rg } A &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \begin{cases} C'_1 = C_1 \\ C'_2 = C_2 - C_1 \\ C'_3 = C_3 - 2C_1 \end{cases} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} && \begin{cases} C''_1 = C'_1 \\ C''_2 = C'_2 \\ C''_3 = C'_3 + 3C'_1 \end{cases} \\ &= 2 && \text{(matrice échelonnée en colonnes).} \end{aligned}$$

On en conclut que $\dim F = \text{rg } A = 2$.

- (b) On peut présenter la recherche d'une base de la façon systématique suivante : on fixe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$; on écrit la condition que $\mathbf{x}$ appartient à F comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients de la combinaison linéaire de $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$; on met ce système sous forme triangulaire ; on discute le système ainsi obtenu.

Plus précisément, soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \in F &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 \\
 &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 \end{pmatrix} \\
 &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_1 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = x_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = x_3 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = x_4 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 = x_5 \end{cases} \\
 &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = -3x_1 + x_2 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2x_1 + x_3 \\ 2\lambda_2 - 6\lambda_3 = -2x_1 + x_4 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = -3x_1 + x_5 \end{cases} \\
 &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = -3x_1 + x_2 \\ 0 = -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = 4x_1 - 2x_2 + x_4 \\ 0 = -6x_1 + x_2 + x_5 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = 4x_1 - 2x_2 + x_4 \\ 0 = -6x_1 + x_2 + x_5 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

NB : La dernière équivalence est essentiellement triviale. Le sens $\implies$ est évident : s'il existe une solution au système, ses trois dernières équations sont satisfaites.

Le sens $\impliedby$ est presque évident parce qu'on a un système triangulaire. En effet, il faut montrer l'existence d'une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ à un système de cinq équations sous l'hypothèse que les trois dernières, qui ne portent que sur les x_i , sont satisfaites. Pour cela, on choisit λ_3 arbitrairement ; on trouve λ_2 à l'aide de la deuxième équation puis λ_1 à l'aide de la première, ce qui donne une solution !

*Fin de réponse courte*¹. Une base de $F^\perp$ est donnée par les membres de droite des trois équations du dernier système – et en particulier, $\dim F^\perp = 3$ et $\dim F = 5 - 3 = 2$:

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (-\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*, 4\mathbf{e}_1^* - 2\mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_4^*, -6\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_5^*).$$

Fin de réponse longue. Nommons les formes linéaires données par les membres de droite du dernier système : pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$, on pose

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 + x_3 \\ \varphi_2(\mathbf{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_4 \\ \varphi_3(\mathbf{x}) = -6x_1 + x_2 + x_5 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \varphi_1 = -\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* \\ \varphi_2 = 4\mathbf{e}_1^* - 2\mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_4^* \\ \varphi_3 = -6\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_5^* \end{cases}$$

Ces formes sont linéairement indépendantes.

1. Ici comme plus bas, les $\mathbf{e}_i^*$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^5$, i.e. $\mathbf{e}_i^* : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_5) \mapsto x_i$ (pour $1 \leq i \leq 5$).

On peut le justifier par la forme échelonnée de la matrice de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^5)^*$ ou mieux, par le fait qu'on les a obtenues en effectuant des opérations élémentaires *inversibles* sur les lignes des systèmes successifs et que les formes dans les membres de droite du système initial, qui ne sont autres que les e_i^* , sont linéairement indépendantes.

Bref, la dernière équivalence exprime que

$$F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \cap \ker \varphi_3.$$

Comme $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre, c'est une base de $F^\perp$. □

En effet, complétons la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ en une base $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_5)$ de $(\mathbb{R}^5)^*$ et soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_5)$ la base antéduale² de Φ dans $\mathbb{R}^5$. On se convainc que

$$F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \cap \ker \varphi_3 = \text{vect}(\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5)$$

(les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ sont les $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_5 \mathbf{u}_5$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$; l'intersection des noyaux est formée de ceux tels que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, c'est-à-dire $\text{vect}(\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5)$), puis que

$$F^\perp = \text{vect}(\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5)^\perp = \text{vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

(les formes de $(\mathbb{R}^5)^\perp$ sont les $\varphi = \beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_5 \varphi_5$ avec $\beta_1, \dots, \beta_5 \in \mathbb{R}$; l'orthogonal de F est formé des φ telles que $\varphi(\mathbf{u}_4) = \varphi(\mathbf{u}_5) = 0$ (pourquoi?), c'est-à-dire $\beta_4 = \beta_5 = 0$).

Remarque.

- On retrouve que $\dim F = 5 - 3 = 2$: on pouvait donc s'épargner les calculs de la question a.
- On a mieux : en partant de $\mathbf{x} = 0$, pour tout λ_3 , on peut trouver un unique couple (λ_1, λ_2) tel que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution. Le couple (λ_1, λ_2) qui convient pour $\lambda_3 = -1$ donne donc une expression $\mathbf{v}_3 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$. Autrement dit, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est liée et, par unicité, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est libre. Autrement dit, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une base de F .

Vous allez dire que ce n'est pas un scoop : il y a une semaine que nous savons que F est de dimension 2 et il est évident que $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne sont pas colinéaires... L'intérêt est qu'en général, un sous-produit de la résolution du système est de sélectionner une sous-famille qui est une base de l'espace engendré.

Exercice 5 (espaces de polynômes). On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on note $E = \mathbb{K}_n[X]$.

1. Des bases de E et E^*

- (a) Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on note $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{K}$, $P \mapsto P(\alpha_i)$. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* et déterminer sa base antéduale.

Solution. Première méthode. On reconnaît un problème d'interpolation classique dont la solution est apportée par les polynômes de Lagrange. Avec la maturité du regard de L3, on peut les retrouver sans parachutage.

On cherche en effet des polynômes $L_0, \dots, L_n \in E$ tels que $\varphi_i(L_j) = \delta_{ij}$, c'est-à-dire $L_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$. Fixons j . On veut que L_j s'annule en les n scalaires α_i ($i \neq j$), qui sont deux à deux distincts, donc L_j est divisible par le produit des $X - \alpha_i$ ($i \neq j$); on veut qu'il soit de degré au plus n donc il est de la forme $c \prod_{i \neq j} (X - \alpha_i)$; enfin, on veut qu'il prenne la valeur 1 en α_j , ce qui donne la valeur de c et

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad L_j(X) = \prod_{i \neq j} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i}.$$

2. Cela signifie que Φ est la base duale de $\mathbf{u}$. On peut identifier $\mathbf{u}$ à la base duale de Φ , qui est une base du dual de $(\mathbb{R}^5)^*$, c'est-à-dire $(\mathbb{R}^5)^{**}$, qui est naturellement isomorphe à $\mathbb{R}^5$.

Il est immédiat de vérifier que l'on a bien $L_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$ pour tous i et j .

Deuxième méthode : avec un déterminant de Vandermonde³. On applique les φ_j à la base canonique de E :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \quad \varphi_j(X^i) = \alpha_j^i.$$

Comme les α_j sont deux à deux distincts, la matrice $A = (\alpha_j^i)_{0 \leq i, j \leq n}$ est inversible⁴. On en déduit que la famille $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n}$ est libre et qu'elle est génératrice (la deuxième partie, pour le plaisir...).

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j = 0$. En évaluant en X^i , on obtient un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues λ_j :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \lambda_0 \alpha_0^i + \dots + \lambda_n \alpha_n^i = 0.$$

Comme on vient de le voir, la matrice $V = (a_i^j)_{0 \leq i, j \leq n}$ de ce système est inversible : il en résulte que $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$, donc $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n}$ est libre.

En fait, étant donné $M = (\mu_0 \quad \mu_1 \quad \dots \quad \mu_n)^\top \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$, le système

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \lambda_0 \alpha_0^i + \dots + \lambda_n \alpha_n^i = \mu_i$$

admet une unique solution et sa solution $\Lambda = (\lambda_0 \quad \dots \quad \lambda_n)^\top$ est $\Lambda = V^{-1}M$. Cela exprime que $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n}$ est génératrice et que la matrice de passage de la base duale de la base canonique à la base $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est V . $\square$

Variante. En notant $e_i = X^i$ et $\underline{e}^* = (e_0^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de la base canonique, on peut remarquer que $\varphi_j(X^i)$ est le coefficient b_{ij} de e_i^* dans l'expression de φ_j comme combinaison linéaire de $\underline{e}^*$: si $\varphi_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*$, on obtient en évaluant en $e_i = X^i$ l'égalité $\varphi_j(X^i) = b_{ij}$. Autrement dit, la matrice de Vandermonde V est la matrice de la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ dans la base $\underline{e}^*$. Le fait qu'elle est inversible exprime que cette famille est une base.

Remarque. L'inconvénient de cette approche est qu'elle ne décrit pas simplement la base antéduale. En la rapprochant de la première méthode, elle permet tout de même de dire que la matrice de passage de la base canonique à la base des polynômes de Lagrange est $(V^{-1})^\top$.

Exercice 6 (familles de formes linéaires et hyperplans). Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$.

1. On suppose d'abord que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre. Démontrer que φ est combinaison linéaire des $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ si et seulement si $\ker \varphi \supset \ker \varphi_1 \cap \dots \cap \ker \varphi_p$.
2. Démontrer que le résultat est encore vrai pour une famille quelconque $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Remarque. Il est sain de remarquer que si $p = 1$, on retrouve le résultat de l'exercice 3 de la feuille : deux formes linéaires sont colinéaires SSI elles ont le même noyau.

Variante de l'exercice 6 (familles de formes linéaires et hyperplans).

1. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soient $\varphi : E \rightarrow G$ et $\theta : E \rightarrow F$ deux applications linéaires. Démontrer qu'il est équivalent de dire :
 - (i) il existe $\psi : F \rightarrow G$ linéaire telle que $\varphi = \psi \circ \theta$;
 - (ii) $\ker \theta \subset \ker \varphi$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$.

3. Solution proposée à la suite d'une suggestion de l'un d'entre vous.

4. Le déterminant de A est un déterminant de Vandermonde, qu'il est sain de connaître ou de savoir retrouver : $\det A = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (\alpha_l - \alpha_k)$. En effet, si l'on voit $\det A$ comme un polynôme en α_n , avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ fixés :
 — il est de degré au plus $n-1$ (développer par rapport à la dernière ligne) ;
 — le coefficient de α_n^{n-1} est le déterminant $(\alpha_j^i)_{0 \leq i, j \leq n-1}$ (idem) ;
 — il admet $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ pour racines (si $\alpha_n = \alpha_j$ pour un $0 \leq j \leq n-1$, la matrice a deux lignes égales).
 On en déduit une relation de récurrence et on initialise avec le cas $n = 2$.

- (a) Soit $\theta : E \rightarrow \mathbb{K}^p$, $v \mapsto (\varphi_1(v), \dots, \varphi_p(v))$. Quel est le noyau de θ ?
 (b) En appliquant le résultat de la question 1 à $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ et $\theta : E \rightarrow \mathbb{K}^p$ définie ci-dessus, retrouver l'équivalence de l'exercice 6.

Solution. 1. Cette question sera traitée en détail « comme dans un cours » ci-dessous.

2. (a) Soit $v \in E$. Alors $\theta(v) = 0$ (dans $\mathbb{K}^p$) SSI $\varphi_1(v) = \dots = \varphi_p(v) = 0$ SSI $v \in \ker \varphi_1 \cap \dots \cap \ker \varphi_p$. Ainsi, le noyau de θ est l'intersection $\ker \varphi_1 \cap \dots \cap \ker \varphi_p$.
 (b) D'après la question 1 et la description du noyau de θ , l'inclusion $\ker \varphi \supset \ker \varphi_1 \cap \dots \cap \ker \varphi_p$ est équivalente à l'existence de $\psi : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi = \psi \circ \theta$.

Or une application linéaire $\psi : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ est de la forme $(y_1, \dots, y_p) \mapsto a_1 y_1 + \dots + a_p y_p$ pour une matrice $(a_1 \dots a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ convenable. L'existence de ψ équivaut donc à l'existence de scalaires $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall v \in E, \quad \varphi(v) = a_1 \varphi_1(v) + \dots + a_p \varphi_p(v),$$

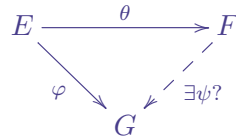
c'est-à-dire que φ est une combinaison linéaire de $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. □

Revenons-en à la première question, que l'on érige en lemme.

Lemme. Soient E , F et G trois espaces vectoriels (de dimension finie) sur $\mathbb{K}$. Soient $\varphi : E \rightarrow G$ et $\theta : E \rightarrow F$ deux applications linéaires. Il est équivalent de dire :

- (i) il existe $\psi : F \rightarrow G$ linéaire telle que $\varphi = \psi \circ \theta$;
 (ii) $\ker \theta \subset \ker \varphi$.

Le diagramme ci-dessous peut aider à visualiser la situation.



Démonstration. (i) $\implies$ (ii) : Supposons l'existence de ψ telle que $\varphi = \psi \circ \theta$ et prouvons (b). Soit donc $v \in \ker \theta$. Alors $\varphi(v) = \psi(\theta(v)) = \psi(0) = 0$, de sorte que $v \in \ker \varphi$.

(ii) $\implies$ (i) : Supposons que $\ker \theta \subset \ker \varphi$. On forme une base de E par complétions successives à l'aide du théorème de la base incomplète. On part d'une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\ker \theta$. On la complète en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\ker \varphi$. Enfin, on la complète en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . Ainsi, $\text{vect}(e_1, \dots, e_r) = \ker \theta$, $E_1 = \text{vect}(e_{r+1}, \dots, e_p)$ est un supplémentaire de $\ker \theta$ dans $\ker \varphi$ et $E_2 = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de $\ker \varphi$ dans E . On a aussi

$$E = \ker \varphi \oplus E_2 = \underbrace{\ker \theta \oplus E_1}_{\ker \varphi} \oplus E_2.$$

D'après le théorème du rang⁵, la restriction de θ à $E_1 \oplus E_2$ est une bijection de $E_1 \oplus E_2$ sur

5. On applique ici à $E_3 = E_1 \oplus E_2$ la version suivante du théorème du rang.

Théorème (du rang, « version abstraite »). Soit $\theta : E \rightarrow F$ linéaire. Soit E_3 un supplémentaire de $\ker \theta$. Alors la restriction de θ à E_3 est un isomorphisme de E_3 sur $\text{im } \theta$.

Démonstration. Soit v dans le noyau de la restriction de θ à E_3 . Cela signifie que $v \in E_3 \cap \ker \theta$, qui est le sous-espace nul : ainsi, $v = 0$. Cela montre que la restriction de θ à E_3 est injective.

Par ailleurs, l'image de la restriction de θ est contenue dans l'image de θ . Montrons qu'il y a égalité. Soit w dans l'image de θ . Il existe $v \in E$ tel que $w = \theta(v)$. On écrit $v = v_0 + v_3$ avec $v_0 \in \ker \theta$ et $v_3 \in E_3$. Alors $w = \varphi(v_0) + \varphi(v_3) = \varphi(v_3)$: ainsi, w est l'image par θ d'un élément de E_3 . Cela montre que la restriction de θ à E_3 est une surjection sur $\text{im } \theta$. □

l'image F_3 de θ . En particulier, la famille

$$(f_{r+1}, \dots, f_n) = (\theta(e_{r+1}), \dots, \theta(e_n))$$

est libre⁶. On la complète en une base $(f_{r+1}, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_m)$ de F .

Voici comment on peut voir les choses.

$$\begin{array}{lcl} E : & e_1, \dots, e_r, & e_{r+1}, \dots, e_p, & e_{p+1}, \dots, e_n \\ F : & \begin{array}{c} \text{---} \theta \text{---} \\ \downarrow \varphi \\ 0 \end{array}, \dots, \begin{array}{c} \text{---} \theta \text{---} \\ \downarrow \varphi \\ 0 \end{array}, & \begin{array}{c} \text{---} \theta \text{---} \\ \downarrow \varphi \\ f_{r+1} \end{array}, \dots, \begin{array}{c} \text{---} \theta \text{---} \\ \downarrow \varphi \\ f_p \end{array}, & \begin{array}{c} \text{---} \theta \text{---} \\ \downarrow \varphi \\ f_{p+1} \end{array}, \dots, \begin{array}{c} \text{---} \theta \text{---} \\ \downarrow \varphi \\ f_n \end{array}, & f_{n+1}, \dots, f_m \\ G : & 0, \dots, 0, & 0, \dots, 0, & \varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n) & 0? & 0? \end{array}$$

On peut à présent définir ψ par l'image de la base de F que l'on vient d'introduire. On pose

$$\psi(f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } r+1 \leq j \leq p, \\ \varphi(e_j) & \text{si } p+1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{si } n+1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

La relation $\varphi = \psi \circ \theta$ se vérifie sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , puisque, par construction de ψ :

- si $1 \leq i \leq r$, alors $\varphi(e_i) = 0$ et $\psi \circ \theta(e_i) = \psi(0) = 0$;
- si $r+1 \leq i \leq p$, alors $\varphi(e_i) = 0$ et $\psi \circ \theta(e_i) = \psi(f_i) = 0$;
- si $p+1 \leq i \leq n$, alors $\psi \circ \theta(e_i) = \psi(f_i) = \varphi(e_i)$.

Cela conclut la démonstration. □

Exercice 7 (bases duales).

1. Soit E de dimension n , soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On cherche la base duale de

- (a) $e' = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$;
- (b) $e'' = (\lambda e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$;
- (c) $e''' = (e_1 + \lambda e_2, e_2, e_3, \dots, e_n)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Solution. Soit $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Il s'agit d'exprimer v comme combinaison linéaire de e' , e'' et e''' .

- (a) On a $v = x_2 e_2 + x_1 e_1 + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n$ donc le coefficient de $e'_1 = e_2$ dans e' est $e'^*_1(v) = x_2$, celui de $e'_2 = e_1$ est $e'^*_2(v) = x_1$, les autres sont inchangés. La base duale de e' est $e'^* = (e'_2, e'_1, e'_3, \dots, e'_n)$.

Matriciellement, on vérifie que la matrice de passage de e à e' est la matrice diagonale par blocs $P' = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_{n-2} \right)$, qui est inversible, donc la matrice de passage de e^* à e'^* est la transposée de l'inverse, $(P'^{-1})^T = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_{n-2} \right)$. On retrouve e'^* .

- (b) On a $v = \frac{1}{\lambda} x_1 (\lambda e_1) + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n$ donc le coefficient de $e''_1 = \lambda e_1$ dans e'' est $e''^*_1(v) = \frac{1}{\lambda} x_1$, celui de $e''_2 = e_2$ est $e''^*_2(v) = x_2$, les suivants sont inchangés aussi. La base duale de e'' est $e''^* = (\frac{1}{\lambda} e^*_1, e^*_2, \dots, e^*_n)$.

Matriciellement, la matrice de passage de e à e'' est la matrice diagonale $P'' = \text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$, qui est inversible, donc la matrice de passage de e^* à e''^* est la transposée de l'inverse, $(P''^{-1})^T = \text{diag}(\frac{1}{\lambda}, 1, \dots, 1)$. On retrouve e''^* .

Remarque. C'est naturel ! Quand on change d'unité en passant par exemple du mètre au kilomètre (la taille de l'étalon est multipliée par mille), les mesures sont divisées par mille.

6. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre. En effet, soit $(v_1, \dots, v_h)$ une famille libre et θ une application linéaire injective. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_h) \in \mathbb{K}^h$ tel que $\lambda_1 \theta(v_1) + \dots + \lambda_h \theta(v_h) = 0$. Par linéarité, cela signifie que $\theta(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_h v_h) = 0$. Par injectivité de θ , il vient $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_h v_h = 0$. Puisque la famille est libre, cela donne $\lambda_1 = \dots = \lambda_h = 0$. D'où l'indépendance linéaire de $(\theta(v_1), \dots, \theta(v_h))$.

(c) On fait apparaître de force $e_1''' = e_1 + \lambda e_2$ et on corrige :

$$v = x_1(e_1 + \lambda e_2) + (-\lambda x_1 + x_2)e_2 + x_3e_3 + \cdots + x_ne_n.$$

On en déduit que le coefficient de e_1''' dans e''' est $e_1'''(v) = x_1$, celui de e_2''' est $e_2'''(v) = -\lambda x_1 + x_2$, les coefficients suivants sont inchangés. La base duale de e''' est $e'''^* = (e_1^*, -\lambda e_1^* + e_2^*, e_3^*, \dots, e_n^*)$.

Matriciellement, la matrice de passage de e à e''' est la matrice diagonale par blocs $P''' = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2}\right)$, qui est inversible, donc la matrice de passage de e^* à e'''^* est la transposée de l'inverse, $(P'''^{-1})^T = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2}\right)$. On retrouve e'''^* . $\square$

2. Soit $\mathbf{v}_0 = (v_1, \dots, v_{n-1})$ une famille libre de E et $\varphi \in E^*$. Donner une CNS pour que l'on puisse compléter $\mathbf{v}$ en une base $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de sorte que $\varphi = v_n^*$, le dernier élément de la base duale $\mathbf{v}^*$ de $\mathbf{v}$.

Solution. S'il existe un tel vecteur v_n , alors $\varphi(v_1) = \cdots = \varphi(v_{n-1}) = 0$, c'est-à-dire que $v_1, \dots, v_{n-1}$ sont dans le noyau de φ . Comme c'est une famille libre de cardinal $n-1 = \dim \ker \varphi$, c'en est une base.

Réciproquement, supposons que $(v_1, \dots, v_{n-1})$ soit une base du noyau de φ . Soit w un vecteur n'appartenant pas à ce noyau et soit $v_n = \frac{1}{\varphi(w)}w$. Alors $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ est une base de E : en effet, $\text{vect}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \ker \varphi$ et $\text{vect}(v_n)$ sont supplémentaires (leur intersection est triviale puisque $\varphi(v_n) = 1$ et la somme des dimension est n). De plus, si $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ est la base duale de $\mathbf{v}$, alors $v_n^* = \varphi$ puisque $\varphi(v_1) = \cdots = \varphi(v_{n-1}) = 0$ et $\varphi(v_n) = 1$. $\square$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Produit des matrices élémentaires : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour tous $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.
- Pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe une matrice M unique telle que $\varphi(A) = \text{tr}(MA)$ pour tout $A \in E$.
- La trace est l'unique forme linéaire φ telle que $\varphi(I_n) = n$ et $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour tous $A, B \in E$.
- L'espace engendré par les commutateurs est le noyau de la trace.
- L'ensemble des commutateurs est le noyau de la trace.

Solution. 1. (Vu en TD.) On fixe i, j, k, l . Classiquement, $\delta_{xy} = 1$ si $x = y$ et $\delta_{xy} = 0$ si $x \neq y$.

Première version. On a $E_{ij} = (\delta_{iu}\delta_{jv})_{1 \leq u, v \leq n}$ et $E_{kl} = (\delta_{ku}\delta_{lv})_{1 \leq u, v \leq n}$. Pour $u, v \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice (u, v) de $E_{ij}E_{kl}$ est

$$(E_{ij}E_{kl})_{uv} = \sum_{w=1}^n (E_{ij})_{uw}(E_{kl})_{wv} = \sum_{w=1}^n \delta_{iu}\delta_{jw}\delta_{kw}\delta_{lv} = \delta_{jk}\delta_{iu}\delta_{lv}.$$

Explication de la dernière égalité : si $j \neq k$, un indice w ne peut pas être égal simultanément à j et à k donc $\delta_{jw}\delta_{kw} = 0$; si $j = k$, le seul indice w pour lequel le produit $\delta_{jw}\delta_{kw}$ n'est pas nul est $w = j$ et il vaut alors 1. On reconnaît le coefficient d'indice (u, v) de $\delta_{jk}E_{il}$.

Deuxième version. La matrice E_{kl} est la matrice, dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, de la multiplication par E_{kl} : elle envoie e_l sur e_k et annule e_h pour $h \neq l$. De même, la multiplication par E_{ij} envoie e_j sur e_i et annule e_h pour $h \neq j$. Quand on compose ces deux applications, on voit que e_l est envoyé sur e_i si $k = j$ et annulé si $k \neq j$, et que e_h est annulé si $h \neq l$. Cela montre que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

2. (Vu en TD aussi.) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$, de sorte que $M = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}E_{ij}$. Calculons $\varphi_M : A \mapsto \text{tr}(MA)$. Pour $(k, l) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a :

$$ME_{kl} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_i m_{ik}E_{il}$$

donc (vu que $\text{tr } E_{il} = \delta_{il}$ pour tout (i, l))

$$\text{tr}(ME_{kl}) = \sum_{1 \leq i \leq n} m_{ik} \text{tr}(E_{il}) = m_{lk}.$$

Cela montre que

$$\varphi_M = \sum_{1 \leq k, l \leq n} m_{lk} E_{kl}^*.$$

Puisque les E_{kl}^* forment une base, la propriété à démontrer devient évidente : si $\varphi = \sum_{1 \leq k, l \leq n} x_{kl} E_{kl}^*$, la matrice $M = (x_{lk})_{1 \leq k, l \leq n}$ convient – c'est-à-dire que $\varphi = \varphi_M$ – et c'est la seule.

3. Il est bien connu que la trace satisfait aux deux propriétés énoncées. Pour (re)démontrer la deuxième, on peut utiliser la première question : pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la trace de E_{il} est

$$\sum_{1 \leq u \leq n} (E_{il})_{uu} = \sum_{1 \leq i \leq n} \delta_{iu} \delta_{lu} = \delta_{il}$$

et donc $\text{tr } E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} \text{tr } E_{il} = \delta_{il} \delta_{jk}$, expression symétrique en (i, j) et (k, l) . On en déduit l'égalité $\text{tr } AB = \text{tr } BA$ par de la bilinéarité de l'application $(A, B) \mapsto \text{tr } AB$ (provenant de la bilinéarité du produit et de la linéarité de la trace).

Pour la réciproque, soit à présent $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(I_n) = n$ et $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour tout $(A, B) \in E^2$. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $\varphi = \varphi_M$. Montrons que $M = I_n$.

Fixons $i \neq j$. On remarque d'abord que $E_{ij} E_{jj} = E_{ij}$ alors que $E_{jj} E_{ij} = 0$. On en déduit que

$$m_{ji} = \text{tr}(ME_{ij}) = \text{tr}(ME_{ij} E_{jj}) = \text{tr}(ME_{jj} E_{ij}) = \text{tr}(0) = 0.$$

D'autre part, on a $E_{ij} E_{ji} = E_{ii}$ et $E_{ji} E_{ij} = E_{jj}$ donc

$$m_{ii} = \text{tr}(ME_{ii}) = \text{tr}(ME_{ij} E_{ji}) = \text{tr}(ME_{ji} E_{ij}) = \text{tr}(ME_{jj}) = m_{jj}$$

donc M est un multiple de l'identité, disons $M = \lambda I_n$. Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0, de l'égalité $n = \varphi(I_n) = \text{tr}(MI_n) = n\lambda$ on tire $\lambda = 1$. Ainsi, $M = I_n$ et $\varphi_M = \text{tr}$.

Remarque. Cette solution bien parachutée est hypocrite : pour la trouver j'ai utilisé les relations de la question suivante...

4. On commence par vérifier que pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} E_{ij} &= E_{ii} E_{ij} - E_{ij} E_{ii} ; \\ E_{ii} - E_{jj} &= E_{ij} E_{ji} - E_{ji} E_{ij}. \end{aligned}$$

Cela démontre que les $n^2 - 1$ matrices linéairement indépendantes suivantes sont des commutateurs :

$$E_{ij} \ (1 \leq i \neq j \leq n), \quad E_{ii} - E_{nn} \ (1 \leq i \leq n-1).$$

[Il y en a $n^2 - n$ du premier type et $n - 1$ du deuxième type, soit $n^2 - 1$ en tout. Elles sont linéairement indépendantes car la matrice de la famille dans la base canonique convenablement ordonnée⁷ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.] Ainsi, l'espace engendré par les commutateurs est de dimension au moins $n^2 - 1$.

Bien sûr, l'identité n'est pas un commutateur puisque sa trace n'est pas nulle alors que la trace d'un commutateur l'est. Cela montre que l'espace engendré par les commutateurs est de dimension au plus $n^2 - 1$.

Au bilan, l'espace engendré par les commutateurs est exactement le noyau de la trace. $\square$

7. Mettre d'abord les E_{ij} avec $i \neq j$ dans un ordre arbitraire, puis $(E_{11}, \dots, E_{n-1, n-1}, E_{nn})$.