

FEUILLE D'EXERCICES 1 : DUALITÉ EN DIMENSION FINIE

Dans les exercices qui suivent, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour des entiers naturels m et n avec $m \leq n$, on note

$$\llbracket m, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}; m \leq k \leq n\}.$$

Exercice 1. (Exemple de base duale) Soit $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$, où

$$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{e}_2 = (1, 0, -1), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 1, 1).$$

Déterminer la base $\underline{e}^*$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\underline{e}$.

Exercice 2. (Exemples de formes linéaires) On considère $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ définies par

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4,$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - x_4,$$

$$\varphi_3(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4,$$

pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une famille libre de $(\mathbb{R}^4)^*$.

Exercice 3. (Formes linéaires et hyperplans) Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E . Montrer que φ et ψ sont proportionnelles si et seulement si $\ker \varphi = \ker \psi$.

Exercice 4. (Orthogonal au sens de la dualité)

- (1) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p . On définit

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in F, \varphi(v) = 0\}.$$

Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* et déterminer sa dimension en fonction de n et p .

- (2) *Application.* On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, -2, 2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 4, -3, 4, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 3, -1, -2, 9).$$

- (a) Déterminer la dimension de F . Quelle est la dimension de $F^\perp$?
(b) Déterminer une base de $F^\perp$ dans $(\mathbb{R}^5)^*$.

Exercice 5. (Espaces de polynômes) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $E = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n .

- (1) *Des bases de E et E^* .*

- (a) Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On définit pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_i: E \rightarrow \mathbb{K}$, $P \mapsto P(\alpha_i)$. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* et déterminer sa base antéduale.

- (b) Soit $a \in \mathbb{K}$. On note pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_k = \frac{(X - a)^k}{k!}$.

- (i) Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E et exprimer tout élément P de E dans cette base.
- (ii) Déterminer la base duale de $(Q_0, \dots, Q_n)$.
- (2) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X - a)P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Que peut-on dire de φ ?
- (3) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X - a)^2 P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Que peut-on dire de φ ?
- (4) Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit $\psi_i: E \rightarrow \mathbb{K}$, $P \mapsto \psi_i(P) = P'(i)$.
Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une famille liée de E^* . Quel est son rang?

Exercice 6. (Familles de formes linéaires et hyperplans) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$.

- (1) On suppose d'abord que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre. Montrer que φ est combinaison linéaire des $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ si et seulement si $\text{Ker } \varphi \supset \text{Ker } \varphi_1 \cap \dots \cap \text{Ker } \varphi_p$.
- (2) Montrer que le résultat est encore vrai pour une famille quelconque $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Exercice 7. (Bases duales) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et $\underline{e}^* = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ la base duale de $\underline{e}$.

- (1) Dans les trois cas suivants, justifier que $\underline{e}'$ est une base de E et déterminer sa base duale $(\underline{e}')^*$:
 - (a) $\underline{e}' = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \dots, \mathbf{e}_n)$;
 - (b) $\underline{e}' = (\lambda \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$;
 - (c) $\underline{e}' = (\mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (2) Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ une famille libre de E et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse compléter $\mathcal{F}$ en une base $\underline{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E de sorte que $\varphi = \mathbf{v}_n^*$, le dernier élément de la base duale $\underline{v}^* = (\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^*)$ de $\underline{v}$.

Exercice 8. (Dual de l'espace des matrices carrées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (1) On note $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de E . Vérifier que pour tous $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, où $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$ and $\delta_{jj} = 1$.
- (2) Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E , il existe une unique matrice M telle que

$$\forall A \in E, \quad \varphi(A) = \text{tr}(MA).$$

On exprimera les coefficients de M en fonction de φ .

- (3) Montrer que la trace est l'unique forme linéaire φ sur E vérifiant les deux propriétés suivantes :
 - (a) $\varphi(I_n) = n$;
 - (b) $\forall A, B \in E, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$.
- (4) On dit qu'une matrice $M \in E$ est un *commutateur* s'il existe A et B dans E tels que $M = AB - BA$. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par les commutateurs. Indication : montrer que toute matrice de la forme E_{ij} avec $i \neq j$ est un commutateur, ainsi que toute matrice de la forme $E_{ii} - E_{jj}$.
- (5) Un théorème montre que ce sous-espace vectoriel est égal à l'ensemble des commutateurs. On pourra essayer de le démontrer.