

Dans ce chapitre, on va considérer des $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie, même si certaines notions persistent en dimension infinie.

① Formes hermitiennes

La notion nouvelle ici est celle de forme semi-linéaire, reposant sur la conjugaison dans $\mathbb{C}$.

Définition: Une application $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}$, où E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, est dite semi-linéaire si pour tout $(x, y) \in E \times E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
 $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \bar{\lambda} \varphi(y)$, $\bar{\lambda}$ étant le nombre complexe conjugué de λ :
 si $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.

Exemple: $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto \bar{z}_k, \text{ pour } k \in [1, m] \text{ fixé.}$$

En particulier, une forme semi-linéaire φ vérifie que, pour tout $x \in E$,
 $\varphi(ix) = -i \varphi(x)$.

Proposition: Pour $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) φ est semi-linéaire.
- (ii) a) φ est additive (pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$),
 b) et pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(\lambda x) = \bar{\lambda} \varphi(x)$.
- (iii) a) φ est additive; b) pour tout $x \in E$, $\varphi(ix) = -i \varphi(x)$; c) pour tous $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

dém: (i) $\Rightarrow$ (ii) en appliquant la propriété $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \bar{\lambda} \varphi(y)$ à
 • $\lambda = 1$ ($\Rightarrow$ additivité), • $x = 0$, $\lambda = 0$ ($\Rightarrow \varphi(0) = 0$), • $x = 0$ ($\Rightarrow \varphi(\lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(y)$).
 (ii) $\Rightarrow$ (iii) en appliquant $\varphi(\lambda x) = \bar{\lambda} \varphi(x)$ à $\lambda = i$ et à $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$.
 (iii) $\Rightarrow$ (i) car pour $(x, y) \in E \times E$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\varphi(x + \lambda y) \stackrel{a)}{=} \varphi(x) + \varphi(\lambda y)$,
 $\varphi(\lambda y) = \varphi(\alpha y + i\beta y) \stackrel{a)}{=} \varphi(\alpha y) + \varphi(i\beta y) \stackrel{b)}{=} \alpha \varphi(y) - i \varphi(\beta y) \stackrel{c)}{=} \alpha \varphi(y) - i\beta \varphi(y) = \bar{\lambda} \varphi(y)$. $\square$

À cause de la propriété $\varphi(ix) = -i \varphi(x)$, on dit aussi que
 φ est anti-linéaire.

Définition: Une application $f: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est dite sesquilinéaire si elle est linéaire par rapport à l'une de ses variables et semi-linéaire par rapport à l'autre. On conviend ici (comme en mécanique quantique) qu'elle est linéaire à droite: $f(x, y + \lambda z) = f(x, y) + \lambda f(x, z)$, et semi-linéaire à gauche: $f(x + \lambda y, z) = f(x, z) + \bar{\lambda} f(y, z)$, pour tous $(x, y, z) \in E^3$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Exemples:
- $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
 $(z, w) \mapsto \bar{z}w$
 - $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ plus généralement
 $((z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k$
 - $\mathbb{C}_n[x] \times \mathbb{C}_n[x] \rightarrow \mathbb{C}$
 $(P, Q) \mapsto \int_0^1 \overline{P(t)} Q(t) dt$
 - $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$
 $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^* B)$, $A^* = \overline{A}^T$

Définition: Une forme hermitienne est une forme sesquilinéaire f dotée de la propriété supplémentaire de symétrie hermitienne: $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, pour tout (x, y) .

Remarque: si f est une forme hermitienne, pour tout $x \in E$, $f(x, x) = \overline{f(x, x)}$ donc $f(x, x) \in \mathbb{R}$.

Définition: Une forme quadratique hermitienne est une application $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme hermitienne f ; pour tout $x \in E$, $q(x) = f(x, x)$.

⚠ Une forme quadratique hermitienne ^{non nulle} n'est pas une forme quadratique ^{complexe} au sens où on l'a vu précédemment: si $q(x) = f(x, x)$ avec f sesquilinéaire alors $q(ix) = -i^2 q(x) = q(x)$, tandis que pour une forme quadratique complexe p , $p(ix) = i^2 p(x) = -p(x)$.

Proposition: Si q est une forme quadratique hermitienne, il existe une unique forme hermitienne f telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = f(x, x)$.

Dém: Si $q(x) = f(x, x)$ pour tout $x \in E$ avec f forme hermitienne, pour $\#(x, y) \in E^2$,
 $q(x+y) = q(x) + q(y) + f(x, y) + f(y, x) = q(x) + q(y) + 2 \text{Re } f(x, y)$,
 $q(x-y) = q(x) + q(y) - f(x, y) - f(y, x) = q(x) + q(y) - 2 \text{Re } f(x, y)$,
donc $\text{Re } f(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y))$,
 $q(x+iy) = q(x) + q(y) + i f(x, y) - i f(y, x) = q(x) + q(y) - 2 \text{Im } f(x, y)$,
 $q(x-iy) = q(x) + q(y) - i f(x, y) + i f(y, x) = q(x) + q(y) + 2 \text{Im } f(x, y)$,
donc $\text{Im } f(x, y) = -\frac{1}{2} (q(x+iy) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4} (q(x-iy) - q(x+iy))$.

On a par conséquent l'identité de polarisation pour tout $(x, y) \in E \times E$, ALBAM V-3

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y) + i q(x-iy) - i q(x+iy)). \quad \text{Ceci montre l'unicité.}$$

Pour l'existence, il faut vérifier que cette formule donne bien une forme quad. hermitienne

• symétrie hermitienne : $f(y, x) = \frac{1}{4} (q(y+x) - q(y-x) + i \underbrace{q(y-ix)}_{q(x+iy)} - i \underbrace{q(y+ix)}_{q(x-iy)}) = \overline{f(x, y)}.$

• sesquilinearité : se vérifie en utilisant celle de q ; $q(x) = g(x)$. (exercice) $\square$

La forme hermitienne ainsi associée à q est sa forme polaire.

② Produit hermitien, norme hermitienne

On pourrait développer la théorie des formes hermitiennes comme celle des formes quadratiques (chapitre III). On va cependant se restreindre à celles qui sont définies positives.

Définition : Une forme quadratique hermitienne $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E si : pour tout $z \in E$, $q(z) \geq 0$, avec égalité seulement pour $z = 0$. Une forme hermitienne est définie positive si c'est la forme polaire d'une forme quadratique hermitienne définie positive.

Exemples : • $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto \sum_{k=1}^m |z_k|^2 \quad \text{est une forme quadratique hermitienne définie positive.}$$

• $\mathbb{C}_m[x] \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \mapsto \int_0^1 |P(t)|^2 dt$$

(exercice)

• $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$A \mapsto \text{tr}(A^* A)$$

$$(\text{tr}(A^* A) = \sum_{k,l} |a_{kl}|^2 \geq 0, = 0 \text{ssi } A = 0)$$

Définition : On appelle produit scalaire hermitien une forme hermitienne définie positive sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (de dimension finie).

On le note en général $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Propriétés : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E ,

• $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

• $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

• $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$,

• $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

• $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ et $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

⚠ Un produit scalaire hermitien est à valeurs dans $\mathbb{C}$. C'est la forme quadratique hermitienne associée qui est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition: Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E , l'application $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur E vérifiant de plus :

$$z \mapsto \sqrt{\langle z, z \rangle} = \|z\|$$

pour tout $(z, w) \in E \times E$, $|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \|w\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz), avec égalité si et seulement si z et w sont colinéaires.

Remarque: on utilise parfois une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\operatorname{Re} \langle z, w \rangle \leq \|z\| \|w\|.$$

Démonstration: 1) $\sqrt{\langle z, z \rangle} \geq 0$, avec égalité ssi $z=0$ puisque $q: z \mapsto \langle z, z \rangle$ est définie positive.

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in E$, $\sqrt{\langle \lambda z, \lambda z \rangle} = \sqrt{\bar{\lambda} \lambda \langle z, z \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle z, z \rangle}$.

↑
module de λ : $|\lambda| = \sqrt{\bar{\lambda} \lambda}$.

3) L'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme pour les produits scalaires euclidiens.

En effet, on a $\|z+w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle z, w \rangle$ (en utilisant les propriétés de $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
 $\leq \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|z\| \|w\| = (\|z\| + \|w\|)^2$.

Montrons l'inégalité de Cauchy-Schwarz: Soit $(z, w) \in E^2$, $w \neq 0$ (sinon, rien à démontrer).
 Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\|z + \lambda w\|^2 \geq 0$, c'est-à-dire: $\|z\|^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle z, w \rangle) \geq 0$.
 En particulier, pour $\lambda = -\overline{\langle z, w \rangle} / \|w\|^2$, on trouve $\|z\|^2 + \frac{|\langle z, w \rangle|^2}{\|w\|^2} - 2 \frac{|\langle z, w \rangle|^2}{\|w\|^2} \geq 0$,
 d'où $|\langle z, w \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \|w\|^2$. □

Les identités précédemment observées s'écrivent:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle,$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle,$$

$$\text{d'où } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

identité du parallélogramme

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + i \|x-iy\|^2 - i \|x+iy\|^2). \quad \text{identité de polarisation}$$

Définition: Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien est appelé espace hermitien. La norme associée est appelée norme hermitienne.

Exemples: • $\mathbb{C}^m$, muni du produit scalaire hermitien canonique

$$(z, w) \mapsto \sum_{k=1}^m \bar{z}_k w_k \quad \text{pour } z = (z_1, \dots, z_m), w = (w_1, \dots, w_m).$$

$$\bullet \mathbb{C}_m[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \overline{P(t)} Q(t) dt \quad \bullet M_m(\mathbb{C}), \langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^* B).$$

② Orthogonalité

Les notions vues dans les espaces euclidiens ont leurs analogues dans les espaces hermitiens.

a) Vecteurs orthogonaux : dans un espace hermitien E , deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$. Pythagore: $x \perp y$ ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Pour toute partie A de E , $A^\perp = \{x \in E; \forall y \in A, x \perp y\} = (\text{vect } A)^\perp$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$.

De plus, $(F^\perp)^\perp = F$. (Par définition, si $x \in F$ et $y \in F^\perp$, $\langle y, x \rangle = 0$, ce qui équivaut à $\langle x, y \rangle = 0$,
 idem cas euclidien | donc $x \in (F^\perp)^\perp$. L'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ est une égalité puisque
 (à ajouter!) $\dim (F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$.)

b) Familles orthogonales / orthonormées.

Dans un espace hermitien, une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale si $\langle u_k, u_l \rangle = 0$ pour tout (k, l) avec $k \neq l$, et orthonormée si

$\langle u_k, u_l \rangle = \delta_{kl}$. Une base orthogonale / orthonormée est une base et une famille orthogonale / orthonormée.

Exemple: la base canonique de $\mathbb{C}^m$ est orthonormée.

Si $\underline{e} = (e_1, \dots, e_m)$ est une base orthonormée d'un espace hermitien E , pour tout $z \in E$,

$$z = \sum_{k=1}^m \langle e_k, z \rangle e_k \quad \left(\text{si } z = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k \text{ alors } \langle e_l, z \rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle e_l, e_k \rangle = \lambda_l \right)$$

attention, l'ordre est important : il est dicté par le fait que $z \mapsto \langle e_k, z \rangle$ est linéaire, tandis que $z \mapsto \langle z, e_k \rangle$ est semi-linéaire.

c) Projections orthogonales.

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace hermitien E , F muni d'une base orthogonale $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p)$, les projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$ sont respectivement données par

$$\Pi_F(z) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle u_k, z \rangle}{\|u_k\|^2} u_k \quad \text{et} \quad \Pi_{F^\perp}(z) = z - \Pi_F(z). \quad (\text{exercice})$$

d) Orthonormalisation

Théorème (Gram-Schmidt): Si $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre d'un espace hermitien, pour tout $k \in [1, p]$, il existe une famille orthonormée $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ telle que $\text{vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Conséquence: Tout espace hermitien admet une base orthonormée (BON).

e) Point de vue analytique

Si $F \subset E$ espace hermitien, pour tout $z \in E$, $\|z - \Pi_F(z)\| = \min_{y \in F} \|z - y\|$.

④ Endomorphismes d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

a) Adjoint: si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq. pour tout $(z, w) \in E \times E$, $\langle u(z), w \rangle = \langle z, u^*(w) \rangle$. si e est une base orthonormée de E ,
 $\text{mat}_e u^* = (\text{mat}_e u)^*$; où $A^* := \overline{A}^T$ pour toute matrice à coefficients complexes.
 $\uparrow$ adjoint de u $\uparrow$ matrice "transconjugée" (exercice)

b) Endomorphismes auto-adjoints

Définition: si $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est auto-adjoint si $u = u^*$, i.e. pour tout $(z, w) \in E \times E$, $\langle u(z), w \rangle = \langle z, u(w) \rangle$.

Si u est autoadjoint, sa matrice A dans une BON est telle que $A^* = A$: on dit que c'est une matrice hermitienne. Toute matrice hermitienne est la matrice dans une BON d'un endomorphisme autoadjoint.

Exemples / contre-exemples:

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
hermitienne	pas hermitienne ($\overline{a_{11}} = -a_{11}$)	pas hermitienne ($\overline{a_{12}} = -a_{21}$)

Remarque: les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

Proposition: Toute projection orthogonale est auto-adjointe.

Dém: soit $F \subset E$, u une BON de F . Alors $\Pi_F(z) = \sum_{k=1}^p \langle u_k, z \rangle u_k$, $\forall z \in E$.
 Par suite, pour tout $(z, w) \in E \times E$, $\langle \Pi_F(z), w \rangle = \sum_{k=1}^p \langle u_k, z \rangle \langle u_k, w \rangle$,
 $\uparrow$ semi-linéarité à gauche
 i.e. $\langle \Pi_F(z), w \rangle = \sum_{k=1}^p \langle z, u_k \rangle \langle u_k, w \rangle$
 $= \langle z, \sum_{k=1}^p \langle u_k, w \rangle u_k \rangle = \langle z, \Pi_F(w) \rangle$.
 $\uparrow$ linéarité à droite

Théorème spectral: tout endomorphisme auto-adjoint a ses valeurs propres réelles et il est diagonalisable dans une base orthonormée, ses sous-espaces propres étant 2 à 2 orthogonaux.

Le 1^{er} point est presque immédiat: si z est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, $u(z) = \lambda z$, d'où $\langle u(z), z \rangle = \overline{\lambda} \|z\|^2$
 $= \langle z, u(z) \rangle = \lambda \|z\|^2$, ce qui implique $\lambda = \overline{\lambda}$ puisque $\|z\| \neq 0$.

La diagonalisation dans une BON est vraie plus généralement pour les endomorphismes normaux que l'on verra plus loin.

La notion d'endomorphisme unitaire est aux espaces hermitiens ce qu'est celle d'endomorphisme orthogonal aux espaces euclidiens.

Proposition: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) u préserve le produit scalaire hermitien: pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
 (ii) u préserve la norme hermitienne: pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Dém: (i) $\Rightarrow$ (ii) car $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) car $\|u(x+y)\|^2 \stackrel{(ii)}{=} \|x+y\|^2$
 $\left. \begin{array}{l} \|u(x)\|^2 \stackrel{(ii)}{=} \|x\|^2 \\ \|u(y)\|^2 \stackrel{(ii)}{=} \|y\|^2 \end{array} \right\} \text{ implique } \operatorname{Re} \langle u(x), u(y) \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle,$

et de façon analogue, $\|u(x+iy)\|^2 = \|x+iy\|^2$ implique $\operatorname{Re} \langle u(x), u(y) \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$,
 d'où $\operatorname{Im} \langle u(x), u(y) \rangle = \operatorname{Im} \langle x, y \rangle$. Donc $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. $\square$

Définition: un endomorphisme vérifiant (i)(ii) est dit unitaire.

Remarque: unitaire implique inversible.

Proposition: Si u est unitaire et $\mathcal{e} = (e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée,
 $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{e}} u$ est telle que $A^* A = A A^* = I_m$.

Dém: Par définition, $u(e_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} e_k$, et par hypothèse, $\langle u(e_j), u(e_m) \rangle = \delta_{jm}$,
 donc $\delta_{jm} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kj} a_{lm} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^m \bar{a}_{kj} a_{km} = (A^* A)_{jm}$.
 ↑
 semi-linéarité à gauche
 linéarité à droite

Ceci montre que $I_m = A^* A$. D'où aussi $A A^* = I_m$, ie $\boxed{A^* = A^{-1}}$: on dit que c'est une matrice unitaire.

Remarque: Par définition, un endomorphisme unitaire transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Inversement, un endomorphisme $u: \mathcal{e} \mapsto \mathcal{e}'$ avec $\mathcal{e}$ et $\mathcal{e}'$ orthonormées est unitaire: pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^m x_k e_k$, $u(x) = \sum_{k=1}^m x_k e'_k$,
 $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^m |x_k|^2 \underbrace{\|e'_k\|^2}_1 = \sum_{k=1}^m |x_k|^2 \underbrace{\|e_k\|^2}_1 = \|x\|^2$.
 Pythagore

Par suite, les matrices unitaires sont les matrices de passage entre deux bases orthonormées.

Remarque: une matrice réelle et unitaire est orthogonale. ($A^* = \overline{A^T} = A^T$)
 si A réelle

Proposition: le déterminant d'une matrice unitaire est de module 1.

En effet, si $A = \text{mat}_{\mathcal{E}} u$, u unitaire, $\mathcal{E}$ orthonormée, $A^* A = I_n$ implique $(\det A^*) \det A = 1$, avec $\det A^* = \overline{\det A^T} = \overline{\det A}$. Donc $|\det A|^2 = 1$, et $\det u = \det A$. $\square$

Proposition: les valeurs propres d'un endomorphisme unitaire / d'une matrice unitaire sont de module 1

En effet, si z est un vecteur propre de u unitaire, $u(z) = \lambda z$, d'où $\|u(z)\|^2 = |\lambda|^2 \|z\|^2$.
 $\|z\|^2 \neq 0$

d) Endomorphismes normaux

Définition: Un endomorphisme d'espace hermitien est dit normal s'il commute avec son adjoint, i.e. $u^* \circ u = u \circ u^*$. Une matrice A est normale si $A^* A = A A^*$.

- Cas particuliers:
- matrices symétriques réelles (si $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$, $A^* = A$ commute avec elle-même)
 - matrices antisymétriques réelles (si $A = -A^T \in M_n(\mathbb{R})$, $A^* = -A$ et $(-A)A = A(-A)$.)
 - matrices réelles orthogonales (si $A^{-1} = A^T \in M_n(\mathbb{R})$, $A^* = A^{-1}$ et $(A^{-1})A = A(A^{-1})$.)
 - matrices hermitiennes (si $A = A^*$, elle commute avec elle-même)
 - matrices unitaires (si $A^{-1} = A^*$, $(A^{-1})A = A(A^{-1})$.)

Proposition: les matrices normales sont les matrices dans une base orthonormée d'endomorphismes normal.

Dém: si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée, $A = \text{mat}_{\mathcal{E}} u$, alors $A^* = \text{mat}_{\mathcal{E}} u^*$.
 D'où, $\text{mat}_{\mathcal{E}}(u^* \circ u) = A^* A$ et $\text{mat}_{\mathcal{E}}(u \circ u^*) = A A^*$. Donc $u^* \circ u = u \circ u^*$ équivaut à $A^* A = A A^*$. $\square$

Rem: cf p. suivante.

Théorème: Tout endomorphisme normal dans un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormée, ses sous-espaces propres étant orthogonaux deux à deux.

Dém: on procède par récurrence sur la dimension n de E .

Le cas $n=1$ est immédiat: tout endomorphisme d'une droite vectorielle est diagonal, avec un seul espace propre, égal à cette droite.

Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat démontré pour tout espace de dimension n . Soit E de dim. $n+1$, $[u \in \mathcal{L}(E), \text{normal}]$.
 Soit λ une valeur propre de u et E_λ le sous-espace propre associé.

$\dim E_\lambda \geq 1$ et $\dim E_\lambda^\perp = n - \dim E_\lambda \leq n-1$. On a de plus $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$, somme directe orthogonale par définition de $E_\lambda^\perp$.

- E_λ est stable par u^* car si $x \in E_\lambda$: $u(x) = \lambda x$ implique $u^*(u(x)) = \lambda u^*(x)$. Comme u^* est inversible, $u^*(x) \neq 0$. Donc $u^*(x) \in E_\lambda$.
 $u(u^*(x))$ puisque u est normal.
- $E_\lambda^\perp$ est stable par u car si $x \in E_\lambda^\perp$: pour tout $y \in E_\lambda$, $\langle x, y \rangle = 0$,
 et $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = 0$. Donc $u(x) \in E_\lambda^\perp$.
 $\in E_\lambda$ d'après • précédent
- $E_\lambda^\perp$ est stable par u^* car si $x \in E_\lambda^\perp$: pour tout $y \in E_\lambda$, $\langle x, y \rangle = 0$,
 et $\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0$. Donc $u^*(x) \in E_\lambda^\perp$.
 $\uparrow$
 car $u^{**} = u$ (exercice)

avant $\leftarrow$ Remarque: $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E \times E$,
 $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$. En effet:

- si $u^* \circ u = u \circ u^*$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, (u^* \circ u)(y) \rangle = \langle x, (u \circ u^*)(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$.
- Inversement, si $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$ quel que soit $(x, y) \in E \times E$,
 $\langle (u^* \circ u - u \circ u^*)(x), y \rangle = \langle u^*(x), u(y) \rangle - \langle u(x), u^*(y) \rangle = 0$,
 donc $(u^* \circ u - u \circ u^*)(x) = 0$, pour tout $x \in E$. Donc $u^* \circ u = u \circ u^*$.
- Soit $v = u|_{E_\lambda^\perp}$: c'est un endomorphisme de $E_\lambda^\perp$ dont l'adjoint est $v^* = u^*|_{E_\lambda^\perp}$.
 Il est normal puisque $\langle v(x), v(y) \rangle = \langle v^*(x), v^*(y) \rangle$ pour tout $(x, y) \in (E_\lambda^\perp)^2$.

Donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence: ses sous-espaces propres $(F_1, \dots, F_k)$ sont deux à deux orthogonaux et $E_\lambda^\perp = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$. Ce sont des sep de u , et on a
 $E = E_\lambda \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_k$: décomposition en somme directe orthogonale de sep de u . ■

Δ Ce théorème est spécifique au cadre hermitien. Par exemple les rotations dans $\mathbb{R}^m$ sont orthogonales donc normales mais ne se diagonalisent pas dans $\mathbb{R}^m$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}}_{\text{forme réduite sur } \mathbb{C}^2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

forme réduite sur $\mathbb{R}^2$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}} \right), e_2 = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ forme une BON:}$$

$$\begin{cases} \|e_1\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \|e_2\|^2 \\ \langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0. \end{cases}$$

Autre exemple: la matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se diagonalise dans $\mathbb{C}^2$ mais pas dans $\mathbb{R}^2$.

⑤ Point de vue matriciel.

* La matrice du produit scalaire hermitien dans une base quelconque $\underline{e}$ est

$$M = (\langle e_k, e_j \rangle)_{1 \leq k, j \leq m}. \text{ Comme } \langle e_k, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, e_k \rangle}, M \text{ est hermitienne.}$$

* Changement de base: si $\underline{e}'$ est une autre base et $P = \text{mat}_{\underline{e}'} \text{id}_{\underline{e}}$ la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$, la matrice du produit scalaire hermitien dans $\underline{e}'$ est

$$\boxed{M' = P^* M P}. \text{ En effet, pour tout } (x, y) \in E \times E, x = \sum_{k=1}^m x_k e_k, y = \sum_{l=1}^m y_l e_l,$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{x}_k y_l \langle e_k, e_l \rangle = X^* M Y,$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \text{ Le changement de base se traduit par } X = P X',$$

$$Y = P Y',$$

$$\text{d'où } \langle x, y \rangle = (P X')^* M (P Y') = (X')^* (P^* M P) Y', \text{ qui doit \u00eatre \u00e9gal \u00e0 } (X')^* M' Y'. \text{ Donc } M' = P^* M P.$$

* Th\u00e9or\u00e8me de r\u00e9duction pour les matrices: si $A \in M_m(\mathbb{C})$ est normale,

il existe une matrice diagonale D et une matrice unitaire P telles que

$$\boxed{A = P D P^* = P D P^{-1}}.$$

En effet, une matrice normale est la matrice dans une BON d'un endomorphisme normal. En lui appliquant le th\u00e9or\u00e8me de r\u00e9duction, on obtient une nouvelle BON dans laquelle A est diagonale: D . En posant P la matrice de passage entre les BON, on a $A = P^{-1} D P = P^* D P$ puisque P est unitaire.

Ceci s'applique en particulier aux matrices hermitiennes. Dans ce cas, D est \u00e0 coefficients r\u00e9els.

* Si f est une autre forme hermitienne que le produit scalaire hermitien, (f pas n\u00e9cessairement un produit scalaire hermitien), on peut aussi d\u00e9finir sa matrice dans une base quelconque $\underline{e}$ par $\text{mat}_{\underline{e}} f = (f(e_k, e_j))_{1 \leq k, j \leq m}$: elle est hermitienne puisque $f(e_k, e_j) = \overline{f(e_j, e_k)}$ d'apr\u00e8s la propri\u00e9t\u00e9 de sym\u00e9trie hermitienne de f .

Donc il existe une matrice unitaire P et une matrice diagonale r\u00e9elle D telle que $\text{mat}_{\underline{e}} f = P D P^*$. Autrement dit, pour la base $\underline{e}'$ telle que $P = \text{mat}_{\underline{e}'} \text{id}_{\underline{e}}$, pour tout $x = \sum_{k=1}^m x'_k e'_k$, $f(x, x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k |x'_k|^2$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Si de plus $\underline{e}$ est orthonorm\u00e9e (pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$), $\underline{e}'$ aussi: ainsi, $\underline{e}'$ est une base simultan\u00e9ment orthogonale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et f .

* Théorème de décomposition de Schur:

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ (unitaire) et T triangulaire (supérieure) telles que $M = U T U^*$.

Dém: soit $\Phi \in L(\mathbb{C}^n)$ dont M est la matrice dans la base canonique. $\mathcal{E}$.

On sait, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, que Φ est triagonalisable (ceci se démontre par récurrence sur n): il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{V}} \Phi$ est triangulaire supérieure.

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une autre base, orthonormée celle-ci, $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$, telle que pour tout k , $\text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Le fait que $\text{mat}_{\mathcal{V}} \Phi$ soit triangulaire supérieure signifie que tous les espaces $E_k = \text{vect}(v_1, \dots, v_k)$ sont stables par Φ . Donc, pour la même raison, $\text{mat}_{\mathcal{U}} \Phi$ est triangulaire supérieure. En posant U la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{U}$, c'est-à-dire $U = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{U}} \text{id}_{\mathbb{C}^n}$, elle est unitaire (puisque $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$ sont orthonormées), et $M = U T U^*$ avec $T = \text{mat}_{\mathcal{U}} \Phi$. base de Schur $\square$

Ce théorème fournit une autre démonstration de la diagonalisation des endomorphismes autoadjoints ou unitaires dans une base orthonormée / matrices hermitiennes ou unitaires _____ :

- si Φ est auto-adjoint, $\text{mat}_{\mathcal{U}} \Phi = T$, triangulaire supérieure, $\text{mat}_{\mathcal{U}} \Phi^* = T^*$, triangulaire inférieure, et $\Phi^* = \Phi$, donc $T^* = T$ est diagonale réelle.
- si Φ est unitaire, $\text{mat}_{\mathcal{U}} \Phi = T$ triangulaire supérieure, $\text{mat}_{\mathcal{U}} \Phi^* = T^*$, triangulaire inférieure, et $\Phi^* = \Phi^{-1}$, donc $T^* = T^{-1}$ est diagonale (complexe), de coefficients de module 1.