

Chapitre IV: Espaces euclidiens

Pour celles et ceux qui étaient en L2 ici, ce chapitre est un condensé de révisions du programme d'Algèbre 4 (Chapitres I à V du cours de A. Tchoudjem en 25-26). Je vais aller un peu plus vite que dans les chapitres précédents, en passant certaines démonstrations, afin d'avoir plus de temps pour traiter le chapitre suivant, sur les espaces hermitiens (sur $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$).

Dans tout ce chapitre, on considère des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

① Produit scalaire, norme euclidienne

Définition: • un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -ev (de dimension finie) est une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$

ce produit scalaire : pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = f(x, y)$, où f est bilinéaire symétrique sur E et pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle x, x \rangle = f(x, x) > 0$.

• à tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on associe la norme définie par

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in E$. On dit que c'est une norme euclidienne.

Rappel: une norme sur E est une application $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

1* $N(0_E) = 0$ et $N(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$.

2* pour tout $x \in E$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. (ne pas oublier ! !!)

3* pour tout $(x, y) \in E \times E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$: inégalité triangulaire.

La "définition" de la norme euclidienne associée à un produit scalaire nécessite de démontrer que c'est bien une norme. Les propriétés 1 et 2 découlent du fait que $x \mapsto f(x, x)$ est définie positive et que f est bilinéaire. C'est l'inégalité triangulaire qui demande un peu de travail. On peut la voir comme une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, pour tout $(x, y) \in E \times E$. En effet, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ (par bilinéarité + symétrie de f), d'où $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz)sur E , $\mathbb{R}$ ev de dim. finie

Soit f une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire que la forme quadratique associée soit définie positive. Alors pour tout $(x, y) \in E \times E$,
 $(f(x, y))^2 \leq q(x) q(y)$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

preuve: $\bar{a}(x, y)$ fixé, on considère la fonction $g: t \mapsto q(x + ty) = q(x) + 2t f(x, y) + t^2 q(y)$.
 Elle est polynomiale de degré 2 et à valeurs positives ou nulles.

Donc son discriminant est négatif ou nul: $f(x, y)^2 - q(x) q(y) \leq 0$.

Cas d'égalité: g a une racine double, i.e. il existe $t \in \mathbb{R}$; $q(x + ty) = 0$, d'où $x + ty = 0$ puisque q est définie > 0 .

Exemples: • sur $\mathbb{R}^m$, le produit scalaire usuel $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i y_i$.

• sur $M_m(\mathbb{R})$, la norme de Frobenius $A \mapsto \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$, associée au produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$. (Définie positif car $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$, avec =ssi $A = 0$.)

• sur $\mathbb{R}_m[X]$, le produit scalaire "ordinaire" $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t) Q(t) dt$
 (Défini positif car $\int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$, avec =ssi $P = 0$.)

⚠ Une norme n'est pas nécessairement euclidienne. Par exemple sur $\mathbb{R}^m$, $\| \cdot \| \cdot x \mapsto \sum_{i=1}^m |x_i|$. (Elle n'est pas strictement convexe, contrairement à une norme euclidienne $\| \cdot \|$: pour tout $\theta \in [0, 1]$,
 $\left(\left\| \frac{e_1 + e_2}{2} \right\|_1 = 1 = \frac{1}{2} \|e_1\|_1 + \frac{1}{2} \|e_2\|_1 \right)$ et tout $(x, y) \in E \times E$, $\| \theta x + (1-\theta)y \| \leq \theta \|x\| + (1-\theta) \|y\|$, avec =ssi $\theta = 0$ ou 1 ou x et y colinéaires.)

Rappel: l'inégalité triangulaire donne aussi, quelle que soit la norme,
 $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Identités pour une norme euclidienne: (rappels du chapitre III)

- polarisation: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
- parallelogramme: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Définition: un espace euclidien est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
 de dimension finie

② Orthogonalité

a) Vecteurs orthogonaux

Définition Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, deux vecteurs x, y sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Pour toute partie A de E , $A^\perp = \{x \in E; \forall y \in A, x \perp y\}$.

Théorème (Pythagore) Pour tout $(x, y) \in E \times E$, E espace euclidien, $x \perp y$ si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ceci est une conséquence immédiate de l'identité de polarisation (n°1).

Proposition: soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors:

- $E^\perp = \{0_E\}$ • Pour $A \subseteq E$, $A^\perp = (\text{vect } A)^\perp$. Si $F \subseteq E$, $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F , $F^\perp = \{x \in E; \forall i \in [1, p], \langle x, u_i \rangle = 0\}$, et $E = F \oplus F^\perp$. • $(F^\perp)^\perp = F$.

Ceci est une application d'un résultat du chapitre II, le produit scalaire étant, par définition, non-dégénéré (son noyau est inclus dans le cône isotrope $= \{0_E\}$) + $F \subset (F^\perp)^\perp$ et dimensions égales.

b) Familles orthogonales / orthonormées

Définition: Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, une famille $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p)$ est dite orthogonale si $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tout (i, j) avec $i \neq j$, et orthonormée si $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout (i, j) (i.e. $\|u_i\| = 1$ pour tout i). Une base orthogonale / orthonormée de E est une base et une famille orthogonale/orthonormée.

Exercice: m.q. toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

c) Projections orthogonales

Proposition: si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien et $F \subseteq E$ est muni d'une base orthogonale $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p)$, alors pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^p \frac{\langle x, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i + y$ avec $y \in F^\perp$. Les applications $\Pi_F: x \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\langle x, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$ et $x \mapsto x - \Pi_F(x)$ sont les projections orthogonales respectivement sur F et $F^\perp$.

Exercice: vérifier que Π_F et $\text{id}_E - \Pi_F$ sont des projecteurs, i.e. $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$ idem pour $\text{id}_E - \Pi_F$, et $\ker \Pi_F = F^\perp$, $\text{im } \Pi_F = F$.

En particulier, si $\underline{e} = (e_1, \dots, e_m)$ est une base orthogonale de E ,
 pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^m \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$.

Si de plus $\underline{e}$ est orthonormée, $x = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i$, et pour tout $y \in F$,
 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$, ce qui s'écrit du point de vue matriciel:

$$\langle x, y \rangle = X^T Y \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_m \rangle \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \langle y, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, e_m \rangle \end{pmatrix}.$$

d) Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théorème: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E . Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on note $U_k = \text{vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Alors il existe une famille orthonormée $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,
 $\text{vect}(e_1, \dots, e_k) = U_k$.

preuve: on définit $\underline{e}$ par récurrence (finie) en posant:

$$e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad \text{et si } (e_1, \dots, e_k) \text{ a déjà été construit pour } k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket,$$

$$\text{on pose } e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|} \quad \text{où } \tilde{e}_{k+1} := u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1}, e_i \rangle e_i, \text{ qui est } \perp \text{ à tous les } e_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket.$$

En particulier, on peut toujours muni un espace euclidien d'une base orthonormée.

Et si $F < E$, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_m)$ de E et $(e_{p+1}, \dots, e_m)$ est alors une base orthonormée de $F^\perp$. (exercice)

e) Point de vue analytique

Proposition: Soit $F < E$, espace euclidien. Pour tout $x \in E$,

$$\|x - \Pi_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

preuve: Soit $x \in E$, $z = \Pi_F(x)$, $y \in F$. $\|x - y\|^2 = \|z - y\|^2 + \|x - z\|^2$
 puisque $\Pi_F(x - y) = z - y$. D'où $\|x - z\| \leq \|x - y\|$. Pythagore

③ Endomorphismes d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

ALBAM IV - S

a) Adjoint

Proposition: si $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ t.q. pour tout $(x, y) \in E \times E$,
 $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ est une base orthonormée,
 $\text{mat}_{\mathcal{B}} u^* = (\text{mat}_{\mathcal{B}} u)^T$. On dit que u^* est l'adjoint de u .

Preuve: Par définition de u^* , pour tout $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\langle e_i, u^*(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle$.
 Si $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$, $B = \text{mat}_{\mathcal{B}} u^*$, $u(e_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k$, $u^*(e_j) = \sum_{l=1}^m b_{lj} e_l$,
 D'où, puisque la base est orthonormée, $b_{ij} = a_{ji}$, pour $\forall (i, j)$.
 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. (faux sinon).

b) Endomorphismes symétriques

Définition: si $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est symétrique si $u = u^*$, i.e.
 pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Proposition: si u est symétrique, sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique. Toute matrice symétrique est la matrice dans une base orthonormée d'endomorphisme symétrique.

Proposition: si u est symétrique, si $F \subset E$ est stable par u alors $F^\perp$ aussi.

Proposition: • toute projection orthogonale est symétrique.

• Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et idempotente, i.e. $u \circ u = u$, alors c'est une projection orthogonale (sur son image), $E = \text{im } u \oplus \text{ker } u$, somme directe orthogonale).

(exercice...)

si $y = u(x) \in \text{ker } u$ alors $(u \circ u)(x) = u(x) = 0$, donc $y = 0$.

si $y = u(x)$, $z \in \text{ker } u$, alors $\langle y, z \rangle = \langle x, u(z) \rangle = 0$.

$\dim E = \dim \text{im } u + \dim \text{ker } u$.)

Théorème spectral: Tout endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormée et de valeurs propres réelles.

symétrique

• Pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice de passage P telle que $P^T = P^{-1}$; $A = P^T D P$.

L'énoncé matriciel repose sur le fait que la matrice de passage P a deux BON
 vérifie $\boxed{P^T = P^{-1}}$. Preuve: $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux BON. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e'_i, e'_j \rangle$
 $\uparrow$
 matrice orthogonale (déf.)

ALBAM IV - S

$$P = \text{mat}_{\underline{e}} \underline{e}' = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} ; \quad e'_j = \sum_{k=1}^m p_{kj} e_k.$$

$$\text{Pour tout } i, j, \underbrace{\langle e'_i, e'_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_{ki} p_{lj} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^m p_{ki} p_{kj} = (P^T P)_{ij}.$$

c) Endomorphismes orthogonaux

Proposition: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) u préserve le produit scalaire : pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (ii) u préserve la norme euclidienne : pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Δ (i) semble + forte que (ii) ; mais on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i) car : si (ii) est vraie, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$. En développant et en simplifiant, on en déduit $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Définition : un endomorphisme vérifiant (i) (ii) est appelé orthogonal.

Remarque : Un endomorphisme orthogonal préserve l'orthogonalité : si $x \perp y$ alors $u(x) \perp u(y)$, si u est orthogonal.

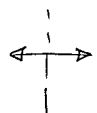
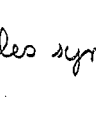
Attention : une projection orthogonale sur un sev "propre" $F \subsetneq E$, $F \neq \{0\}$ n'est pas un endomorphisme orthogonal.

(si F est de dimension $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, soit $x \notin (F \cup F^\perp)$: $x = \underbrace{\pi_F(x)}_y + \underbrace{z}_{\in F^\perp}$,
 $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ et $y \neq 0, z \neq 0$.
 Donc $\|x\| > \|y\|$: π_F ne préserve pas la norme,)
 $> \|z\|$ $\text{id} - \pi_F$ non plus

Théorème : Dans un espace E de dimension $m \geq 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

- (i) u est un endomorphisme orthogonal ;
- (ii) u est un isomorphisme de E et $u^* = u^{-1}$;
- (iii) Il existe une base orthonormée de E où la matrice de u est orthogonale.
- (iv) Pour toute base _____, _____.
- (v) Il existe une _____ telle que son image par u soit une BON.
- (vi) Pour toute base _____, l'image par u est une BON.

Corollaire : Une matrice carrée est orthogonale ssi c'est la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Exemples : les réflexions , les symétries centrales , les rotations  sont des endomorphismes orthogonaux.

Remarque: si M est une matrice orthogonale, i.e. $M^T M = M M^T = I_m$,
 $(\det M)^2 = 1$, donc $\det M = 1$ ou -1 .

Définition: si $u \in \mathcal{O}(E)$, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux,
 si $\det u = 1$, on dit que c'est une isométrie directe,
 si $\det u = -1$, ————— indirecte.

Exemples: • dans $\mathbb{R}^2$, rotations : isométries directes,
 réflexions $\rightarrow$ symétries axiales : — indirectes,
 symétrie centrale (= rotation d'angle $\pi/2$!) : isométrie directe.
 • dans $\mathbb{R}^3$, rotations γ à un axe : isométries directes,
 symétries γ à un plan (réflexions) : indirectes,
 symétrie centrale (= $-\text{id}$) : indirecte!

Proposition: si u est orthogonale, si $F \leq E$ est stable par u , alors $F^\perp$ aussi.

($u|_F$ est un isomorphisme de F : pour tout $z \in F$, il existe $x \in F$; $z = u(x)$.
 Pour tout $y \in F^\perp$, $x \perp y$ donc $u(x) \perp u(y)$, i.e. $z \perp u(y)$. Donc $u(y) \in F^\perp$.)

Remarque: les seules valeurs propres réelles d'un endomorphisme orthogonal sont 1 ou -1 ; ses valeurs propres complexes sont conjuguées deux à deux et de module 1 .

Proposition: L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ (isomorphismes de E).

L'ensemble $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E); \det u = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$.

⚠ $\{u \in \mathcal{O}(E); \det u = -1\}$ n'est pas un sous-gpe
 puisque id_E n'y est pas.

stable par conjugaison:
 si $u \in \mathcal{SO}(E)$, $v \in \mathcal{O}(E)$,
 $v^{-1} \circ u \circ v \in \mathcal{SO}(E)$.

Théorème: si $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe une BON de E , $(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^k$,
 $(\theta_j) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{\frac{m-k}{2}}$ (si $m = \dim E$) tels que la matrice de u dans cette base soit la
 matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_k & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_{\frac{m-k}{2}}} \end{pmatrix}$ avec $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$
 (valeurs propres: $e^{\pm i\theta_j}$!)