

Chapitre III : Formes quadratiques

Dans tout ce chapitre, à nouveau, on considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

① Caractérisation des formes quadratiques

Définition: Si E est un $\mathbb{K}$ ev (de dimension finie), une application $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est appelée forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = f(x, x)$.

Remarque: • les vecteurs isotopes de f sont les zéros de q .
 • le terme quadratique ("qui se rapporte au carré") vient du fait que :
 pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $q(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 f(x, x) = \lambda^2 q(x)$.
 • en particulier, $q(0_E) = 0$.

Exemples: • $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i^2$ • $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j$...

• $\mathbb{K}_m[X] \rightarrow \mathbb{K}$
 $P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$ • $M_m(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$
 $A \mapsto \text{tr}(A^T A)$

Proposition: Soit $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que, pour tout $x \in E$,
 $q(x) = f(x, x)$.

Remarque: sans demander que f soit symétrique, on n'a pas l'unicité.
 Par exemple, $x_1^2 + x_2^2 = f(x, x)$ avec $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ mais aussi
 avec $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \underbrace{x_1 y_2 - x_2 y_1}$
 ou n'importe quelle expression venant d'une forme alternée.

Dém: • on commence par l'unicité (analyse) :

si $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est telle que $q(x, x) = f_0(x, x)$ avec f_0 bilinéaire symétrique, pour tout $x \in E$,

alors, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $q(x+y) = f_0(x+y, x+y) = f_0(x, x) + f_0(y, y) + f_0(x, y) + f_0(y, x) = q(x) + q(y) + 2f_0(x, y)$, par définition de q et symétrie de f_0 .
On en déduit que $f_0(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

• on peut maintenant montrer l'existence (synthèse) :

si $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique, alors l'application $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ qui à (x, y) associe $f_q(x, y) := \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est une forme bilinéaire symétrique.

En effet, la symétrie est immédiate, d'après la commutativité de l'addition (dans E et dans $\mathbb{K}$). De plus, on voit qu'il existe $f \in \text{Bil}(E \times E; \mathbb{K})$ telle que,

pour tout $z \in E$, $q(z) = f(z, z)$. En développant comme ci-dessus, on a

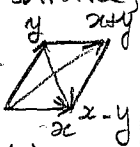
$q(x+y) - q(x) - q(y) = f(x, y) + f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$, c'est-à-dire $f_q(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$: ceci montre que f_q est bilinéaire par bilinéarité de f .

Définition: si $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique, l'application bilinéaire symétrique $f_q: (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est la forme polarisée de q .

Remarque: on peut aussi écrire $f_q(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

en faisant la différence de $f_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$,
et $-f_q(x, y) = f_q(x, -y) = \frac{1}{2}(q(x-y) - q(x) - \underbrace{q(-y)}_{q(y)})$.

De plus, en faisant la somme on obtient l'identité du parallélogramme:
 $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$.



En pratique, on n'utilise guère les formules f_q appelées identités de polarisation.

Exemples: $q: (x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i^2$, $f_q: (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i y_i$.
 $q: (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2$, $f_q: (x, y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \left(\sum_{i=1}^m y_i\right)$.
 $q: P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$, $f_q: (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.
 $q: A \mapsto \text{tr}(A^T A)$, $f_q: (A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ (exercice).
 $q: (x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} x_i x_j$, $f_q: (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^m a_{ii} x_i y_i + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$.

Remarque: x et y sont f_q -orthogonaux si $q(x+y) = q(x) + q(y)$. (Pythagore!)

② Représentation matricielle d'une forme quadratique

Définition: Pour une forme quadratique q sur E et $\underline{e}$ une base de E , on définit la matrice $M = \text{mat}_{\underline{e}} f_q$, où f_q est la forme polaire de q .

Ainsi, pour tout $x \in E$ de composantes $(x_1, \dots, x_m)$ dans la base E , on a $q(x) = X^T M X$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $M = \text{mat}_{\underline{e}} f_q$.

Par définition, la matrice d'une forme quadratique est symétrique.

Proposition: Soit $\underline{e}$ une base de E . Une application $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique ssi il existe un polynôme Q , homogène de degré 2 dans $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$, tel que pour tout $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, $q(x) = Q(x_1, \dots, x_m)$.

Dém.: si q est une forme quadratique, M sa matrice, on a bien

$$q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} m_{ij} x_i x_j = Q(x_1, \dots, x_m) \text{ avec } Q \text{ homogène de degré 2}$$

• si $q(x) = Q(x_1, \dots, x_m)$ avec Q homogène de degré 2, i.e.

$$q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} x_i x_j, \text{ alors } q(x) = f(x, x) \text{ avec } f(x, y) := \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} x_i y_j,$$

qui définit bien f comme forme bilinéaire. Si on veut la forme polaire de q , il suffit de considérer $f_q: (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^m a_{ii} x_i y_i + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$

$$= \sum_{i=1}^m a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) (x_i y_j + x_j y_i). \quad \square$$

③ Propriétés des formes quadratiques

Définition: • on appelle moyau / resp. cône isotrope d'une forme quadratique le moyau / resp. cône isotrope de sa forme polaire.

- Une forme quadratique est non-dégénérée si sa forme polaire est non-dégénérée, c'est que son moyau est réduit à $\{0_E\}$.
- Le rang d'une forme quadratique est celui de sa forme polaire.

Définition: une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est dite:

- positive / resp. négative si $q(x) \geq 0$ / resp. ≤ 0 , quel que soit $x \in E$;
- définie positive / resp. définie négative si $q(x) > 0$ / resp. < 0 , quel que soit $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Autrement dit, une forme quadratique est définie positive / resp. définie négative, si elle est positive / resp. négative, et sans vecteur isotrope non trivial. En particulier, une forme définie positive ou définie négative est non dégénérée, puisque son cône isotrope contient son noyau.

On verra plus loin une méthode pour déterminer si une forme quadratique réelle est définie positive, positive, définie négative, négative... ou rien de tout ça!

Exemple: $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $q(e_1) = 1 > 0$, $q(e_2) = -1 < 0$.
 $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$

④ Réduction des formes quadratiques

Définition: si $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique, on dit que $x, y \in E$ sont q -orthogonaux s'ils sont orthogonaux pour la forme bilinéaire f_q de q , i.e. $f_q(x, y) = 0$. Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est q -orthogonale si les e_i sont deux à deux q -orthogonaux.

Proposition: Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et q une forme quadratique sur E . Alors $\mathcal{E}$ est q -orthogonale ssi la matrice de q dans $\mathcal{E}$ est diagonale.

dém: par définition, $M := \text{mat}_{\mathcal{E}} f_q = (f_q(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, f_q la forme bilinéaire de q . Cette matrice est diagonale ssi $f_q(e_i, e_j) = 0$ pour tout (i, j) avec $i \neq j$, ce qui équivaut au fait que $\mathcal{E}$ soit q -orthogonale. $\square$

Si $\mathcal{E}$ est q -orthogonale, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a $q(x) = \sum_{i=1}^n m_{ii} x_i^2$.

On va montrer qu'on peut toujours choisir une base dans laquelle q a cette forme, c'est qu'il existe une base q -orthogonale pour toute forme quadratique q .

Commençons par démontrer le résultat suivant.

Théorème de décomposition / réduction de Gauss :

sur E de dim. $n \geq 1$ ($n=0$ parties intéressantes)

Soit $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique. Il existe $(\lambda_i)_{i \leq m} \in \mathbb{K}^m$ et $(\varphi_i)_{i \leq m} \in (E^*)^m$ linéairement indépendantes, telles que $q = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i^2$.

Remarque: toute application de la forme $p = \sum \lambda_i \varphi_i^2$ est une forme quadratique, car elle s'écrit $p(x) = P(x_1, \dots, x_m)$ avec P polynôme homogène de degré 2, en développant chaque $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m l_{ij} x_j$, pour $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, $e = (e_1, \dots, e_m)$ base qq.

Dém: on montre ce théorème par récurrence sur m , ce qui donne un procédé constructif en pratique: "l'algorithme de Gauss. Rien à faire si $q=0$: par ex $q = \sum_{i=1}^m 0 \cdot l_i^2$, les formes coord.

- Cas $n=1$: si $E = \text{vect}(e_1)$, pour tout $x = \lambda e_1 \in E$, $q(x) = \lambda^2 q(e_1)$, i.e. $q(x) = q(e_1) (e_1^*(x))^2$, on envoie $q = \lambda_1 \varphi_1^2$ avec $\lambda_1 = q(e_1)$, $\varphi_1 = e_1^*$. (on avait pu se contenter du cas $n=0$ mais $n=1$ plus instructif)
- soit $n \geq 1$ et supposons le théorème démontré pour toute forme quadratique sur un espace de dimension $k \leq m$. Soit $e = (e_1, \dots, e_{m+1})$ une base de E , q forme quadratique sur E : il existe des coefficients a_{ij} (ceux de la matrice de q dans e) tels que pour tout $x \in E$; $x = \sum_{i=1}^{m+1} x_i e_i$, $q(x) = \sum_{i=1}^{m+1} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} 2a_{ij} x_i x_j$. non nulle

On va se ramener à une forme quadratique à au plus n variables.

* cas 1: il existe $i \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket$ tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à opérer une permutation sur la base, on peut supposer $i=1$. Ainsi, on écrit

$$q(x) = a_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{m+1} a_{1j} x_j + \sum_{2 \leq i < j \leq m+1} 2a_{ij} x_i x_j = a_{11} (\varphi_1(x_1, \dots, x_{m+1}))^2 + \sum_{j=2}^{m+1} a_{jj} x_j^2 + q_m(x_2, \dots, x_{m+1}),$$

$$a_{11} \left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{m+1} a_{1j} x_j \right)^2 - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^{m+1} a_{1j} x_j \right)^2$$

ou $\varphi_1 \in E^*$ et q_m est une forme quadratique en les m variables $x_2, \dots, x_{m+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des scalaires $\lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ et formes linéaires indépendantes

$$\varphi_2, \dots, \varphi_{m+1}: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K} \text{ telles que } q_m(x_2, \dots, x_{m+1}) = \sum_{i=2}^{m+1} \lambda_i (\varphi_i(x_2, \dots, x_{m+1}))^2.$$

De plus φ_1 n'appartient pas à $\text{vect}(\varphi_2, \dots, \varphi_{m+1})$, car $\varphi_1(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ tandis que $\varphi_j(0, \dots, 0) = 0$, $j \geq 2$. Donc on a la propriété cherchée pour q .

* cas 2: tous les a_{ii} sont nuls. Puisque q est non nulle, il existe $i < j$ tels que $a_{ij} \neq 0$. Quitte à opérer une permutation sur la base, on peut supposer $i=1, j=2$. On écrit alors:

$$q(x) = \underbrace{2a_{12}x_1x_2 + 2x_1 \sum_{i=3}^{m+1} a_{1i}x_i + 2x_2 \sum_{i=3}^{m+1} a_{2i}x_i + \sum_{3 \leq i < j \leq m+1} 2a_{ij}x_ix_j}_{2a_{12} \left(x_1 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{i=3}^{m+1} a_{2i}x_i \right) \left(x_2 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{i=3}^{m+1} a_{1i}x_i \right) - \frac{2}{a_{12}} \left(\sum_{i=3}^{m+1} a_{2i}x_i \right) \left(\sum_{i=3}^{m+1} a_{1i}x_i \right)} \quad \psi_1(x) \quad \psi_2(x)$$

cad $q(x) = 2a_{12}\psi_1(x)\psi_2(x) + q_{m-1}(x_3, \dots, x_{m+1})$, avec q_{m-1} quadratique et $\psi_1, \psi_2 \in E^*$. L'hypothèse de récurrence permet d'écrire $q_{m-1}(x_3, \dots, x_{m+1}) = \sum_{i=3}^{m+1} \lambda_i (\psi_i(x_3, \dots, x_{m+1}))^2$ avec ψ_i indépendantes. Par ailleurs, $2\psi_1(x)\psi_2(x) = \frac{1}{2} \left[((\psi_1 + \psi_2)(x))^2 - ((\psi_1 - \psi_2)(x))^2 \right]$.

En posant $\varphi_1 = \psi_1 + \psi_2$, $\varphi_2 = \psi_1 - \psi_2$,

qui sont indépendantes car ψ_1 et ψ_2 le sont, puisque φ_2 ne dépend pas de x_1 , et $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{vect}(\psi_3, \dots, \psi_{m+1})$ car les $\psi_j, j \geq 3$, ne dépendent pas de x_1, x_2 , on a la propriété cherchée pour q . Ceci achève la récurrence forte. $\square$

Exemples: • $q(x) = \underbrace{x_1^2 + x_1x_3 + x_2x_3}_{(cas 1 \text{ seul})}$

$$= \left(x_1 + \frac{x_3}{2} \right)^2 - \frac{x_3^2}{4} + x_2x_3 = \left(\frac{x_3}{2} - x_2 \right)^2 + x_2^2.$$

• $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. (cas 2).

$$= (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2 = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4} (x_1 - x_2)^2 - x_3^2.$$

De ce résultat on peut déduire celui-ci.

Corollaire: Soit $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique de rang r sur E de dimension n . Alors il existe une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^r$ tels que, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2$, et la forme polaire de q est donnée par $b_q(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i y_i$.

Remarque: la matrice de q dans la base $\underline{e}$ est alors $\begin{pmatrix} \overset{r}{\uparrow} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \quad \quad \quad 0 \end{pmatrix}$, qui est bien de rang r puisque $\lambda_i \neq 0$.

Dém: Soient (λ_i) et (ψ_i) donnés par le théorème / algorithme de Gauss. Sans perte de généralité on peut supposer, quitte à permuter les ψ_i , que $\lambda_i \neq 0$ pour $i \leq m$ et $\lambda_i = 0$ pour $i > m$, de sorte que $q = \sum_{i=1}^m \lambda_i \psi_i^2$. Soit alors $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ la base antédual de $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $x_i = e_i^*(x) = \psi_i(x)$. Donc $q(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2$. Comme on vient de le remarquer, m est nécessairement le rang r de q . $\square$

Rappel: pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$,
et pour tout $\psi \in E$, $\psi = \sum_{i=1}^n \psi(e_i) e_i^*$.

Exemples revisités: • $q(x) = (x_1 + \frac{x_3}{2})^2 - (\frac{x_3}{2} - x_2)^2 + x_2^2$,

$$\psi_1(x) = x_1 + \frac{x_3}{2}, \quad \psi_2(x) = \frac{x_3}{2} - x_2, \quad \psi_3(x) = x_2.$$

$$\text{matrice des } \psi_i: \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{inverse: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{car:}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_3}{2} = X_1, \\ -x_2 + \frac{x_3}{2} = X_2, \\ x_2 = X_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 - X_2 - X_3 = x_1, \\ X_3 = x_2, \\ 2X_2 + 2X_3 = x_3. \end{cases}$$

D'où la base antédual:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (-1, 0, 2), \quad e_3 = (-1, 1, 2).$$

$$q(x) = X_1^2 - X_2^2 + X_3^2. \quad \text{mat}_{\underline{e}} q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2,$$

$$\varphi_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3, \quad \varphi_2(x) = x_1 - x_2, \quad \varphi_3 = x_3.$$

$$\text{matrice des } \varphi_i : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{inverse : } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = X_1, \\ x_1 - x_2 = X_2, \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - X_3 = x_1, \\ \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_2 - X_3 = x_2, \\ X_3 = x_3, \end{cases}$$

$$\text{base antédual : } e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), e_3 = (-1, 1, 1).$$

$$q(x) = \frac{1}{4}X_1^2 - \frac{1}{4}X_2^2 - X_3^2 \quad \text{mat}_E q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : si $K = \mathbb{C}$, tout $\lambda_i \in K$ s'écrit comme un carré : $\lambda_i = \mu_i^2$, $\mu_i \in K$. Ainsi, on peut redéfinir les formes linéaires φ_i de l'algorithme de Gauss en posant $\tilde{\varphi}_i := \mu_i \varphi_i$ si $\lambda_i \neq 0$ et $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$ si $\lambda_i = 0$. On quitte à réordonner les $\tilde{\varphi}_i$ et la matrice de q dans la base antédual des $\tilde{\varphi}_i$ est $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$. Ceci est la forme "normale" des formes quadratiques complexes de rang n .

• si $K = \mathbb{R}$, la situation est un peu plus compliquée, mais on peut aussi réduire q à une forme "normale", comme on va le voir au § suivant.

⑤ Classification des formes quadratiques.

Proposition : Soient q une forme quadratique sur E et u un endomorphisme de E (i.e. $u \in \mathcal{L}(E; E)$). Alors $q \circ u$ est une forme quadratique

Dém. On sait que $q(x) = f_q(x, x)$ où f_q est la forme polarisée de q .
pour tout x ,

Par suite, $(q \circ u)(y) = f_q(u(y), u(y))$ quel que soit $y \in E$.

Or l'application $f_q(y, z) \mapsto f_q(u(y), u(z))$ est bilinéaire symétrique (exercice), donc $q \circ u$ est quadratique et f_q est sa forme polarisée. $\square$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition: Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur E sont dites congruentes s'il existe un isomorphisme u de E tel que $q_2 = q_1 \circ u$.

Remarque: la notion de congruence est une relation d'équivalence (exercice). La classification des formes quadratiques revient à déterminer les classes d'équivalence pour la congruence.

a) Classification des formes complexes.

Théorème: Deux formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sont congruentes si et seulement si elles ont le même rang. Si e est une base de l'espace, toute forme de rang r est congruente à la forme q définie par $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2$ quelque soit $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$.

Dém.: Comme on l'a vu au § précédent, si q et p sont deux formes quadratiques de rang r , il existe des bases $(\psi_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ de E^* telles que $q = \sum_{i=1}^r \psi_i^2$ et $p = \sum_{i=1}^r \varphi_i^2$. On veut trouver u tel que $p = q \circ u$,
 Puisque (ψ_i) et (φ_i) sont des bases de E^* ,
 les applications $\Phi: E \rightarrow \mathbb{K}^m$
 $y \mapsto (\psi_1(y), \dots, \psi_m(y))$
 et $\Psi: E \rightarrow \mathbb{K}^m$
 $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ sont des isomorphismes.

$$\text{i.e. } \sum_{i=1}^r \psi_i(x)^2 = \sum_{i=1}^r \psi_i(u(x))^2.$$

Ceci montrera qu'elles sont congruentes

et $\Psi: E \rightarrow \mathbb{K}^m$
 $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ sont des isomorphismes.

En effet, $\{y \in E; \Phi(y) = 0\} = \bigcap_{i=1}^m \ker \psi_i = \{0_E\}$,

de même $\{x \in E; \Psi(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^m \ker \varphi_i = \{0_E\}$.

Donc Φ et Ψ sont injectives, et donc surjectives puisque $\dim E = \dim E^* = n$.

Il suffit alors de poser $u := \Phi^{-1} \circ \Psi$:

pour tout $x \in E$, $\Phi(u(x)) = \Psi(x)$, i.e. $\psi_i(u(x)) = \varphi_i(x)$, $i \in [1, m]$.

• En particulier, si e est une base de E , la forme $q: x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^r x_i^2$ est de rang r , donc d'après ce qui précède, la forme quadratique de rang r est cong. à q .

• Si $q_2 = q_1 \circ u$ avec $u \in GL(E)$, $b_{q_2}(x, y) = b_{q_1}(u(x), u(y))$ pour tout (x, y) , et si Φ_i sont les applications associées, $x \in \ker \Phi_2$ ssi $u(x) \in \ker \Phi_1$ (car u inversible).

Donc $\dim \ker \Phi_2 = \dim u^{-1}(\ker \Phi_1) = \dim \ker \Phi_1$ (car u inversible), donc $\text{rang } \Phi_2 = \text{rang } \Phi_1$. ■

La classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est plus délicate car tous les réels ne sont pas des carrés. Elle conduit à la notion de signature qu'on verra plus loin.

En reprenant la démonstration du théorème de Gauss ^{et son corollaire} on voit que toute forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E s'écrit $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_i^2$, où $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est une base de E^* et $\lambda_i \neq 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, où r est le rang de q .

On peut alors partager les λ_i en deux parties, et quitte à réordonner les φ_i on peut supposer $\lambda_i > 0$ pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et $\lambda_i < 0$ pour $i \in \llbracket s+1, s+t \rrbracket$ avec $s+t=r$.

Ainsi, en posant $\tilde{\varphi}_i := \sqrt{\lambda_i} \varphi_i$ pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$,

$$\tilde{\varphi}_i := \sqrt{-\lambda_i} \varphi_i \text{ pour } i \in \llbracket s+1, s+t \rrbracket,$$

$$\tilde{\varphi}_i := \varphi_i \text{ pour } i \in \llbracket s+t+1, m \rrbracket,$$

on a une nouvelle base $(\tilde{\varphi}_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ de E^* et $q = \sum_{i=1}^s \tilde{\varphi}_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} \tilde{\varphi}_i^2$.

Autrement dit, la matrice de q dans la base antédual de $(\tilde{\varphi}_i)$ est :

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va voir que les entiers s et t sont invariants par congruence, et que ceci est la forme normale des formes quadratiques caractérisés par le couple (s, t) , qu'on appellera signature.

Plus précisément, on va voir que :

$$s = \max \{ \dim W ; W \leq E, q|_W \text{ est définie positive} \}$$

$$t = \max \{ \dim W ; W \leq E, q|_W \text{ est définie négative} \}.$$

Proposition : Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ -ev E de dimension $n \geq 1$. Soient $v_+(q) := \max \{ \dim W ; W \text{ ser de } E \text{ et } q|_W \text{ est définie positive} \}$,
 $v_-(q) := \max \{ \dim W ; W \text{ ser de } E \text{ et } q|_W \text{ est définie négative} \}$.

Alors il existe une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ de E^* telle que $q = \sum_{i=1}^s \varphi_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} \varphi_i^2$ avec $s = v_+(q)$, $t = v_-(q)$, et $s+t$ le rang de q .

Dém. On sait déjà qu'il existe une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ de E^* et des entiers (s, t) tels que $q = \sum_{i=1}^s \varphi_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} \varphi_i^2$. Il s'agit de montrer que $s = v_+(q)$ et $t = v_-(q)$.

Soient $(e_1, \dots, e_m)$ la base antédual de $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$,

$$W_+ = \text{vect}(e_1, \dots, e_s), \quad W_- = \text{vect}(e_{s+1}, \dots, e_{s+t}).$$

Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $q(e_i) = 1$ et pour $j \in \llbracket s+1, s+t \rrbracket$, $q(e_j) = -1$.

Ainsi, pour tout $x = \sum_{i=1}^s x_i e_i$, $q(x) = \sum_{i=1}^s x_i^2 > 0$ si $x \neq 0$,

et pour tout $x = \sum_{j=s+1}^{s+t} x_j e_j$, $q(x) = - \sum_{j=s+1}^{s+t} x_j^2 < 0$ si $x \neq 0$.

Ceci montre que $q|_{W_+}$ est définie positive et $q|_{W_-}$ est définie négative.

Donc $\nu_+(q) \geq s$ et $\nu_-(q) \geq t$.

Pour montrer l'égalité, supposons que $W < E$ soit de dimension $> s$ et tel que $q|_W$ définie positive. Alors $W \cap \text{vect}(e_{s+1}, \dots, e_m) \neq \{0_E\}$ par des raisons de dimension. La restriction de q à cet espace devrait être définie positive, par hypothèse sur W , et négative, puisque $q|_{W_-}$ est définie négative et

q est nulle sur $\text{vect}(e_{s+t+1}, \dots, e_m)$. C'est donc impossible. Donc $\nu_+(q) \leq s$,

d'où l'égalité. On peut raisonner de la même manière pour montrer que

$\nu_-(q) = t$, ou directement appliquer le résultat précédent à $-q$.

Ainsi, on a bien $\nu_+(q) = s$, $\nu_-(q) = t$, et comme on l'a déjà vu, $s+t$ est nécessairement le rang de q . ▀

On peut reformuler ce résultat ainsi.

Proposition (loi d'inertie de Sylvester): Si une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}^n$ s'écrit dans une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_m)$: $q(x) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$ pour tout $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, les entiers s et t ne dépendent pas de $\underline{e}$.

en effet, on veut de voir que $s = \nu_+(q)$ et $t = \nu_-(q)$ ne dépendent que de q et pas du choix d'une base. Ceci conduit à :

Définition: La signature d'une forme quadratique réelle est le couple d'entiers (s, t) défini par $s = \max \{ \dim W; W < E \text{ et } q|_W \text{ définie positive} \}$, $t = \max \{ W; W < E \text{ et } q|_W \text{ définie positive} \}$.

Théorème: Deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$ -ev

sont congruentes si et seulement si elles ont (même rang et) même signature.

Si $\underline{e}$ est une base de l'espace, toute forme q de signature (s, t) (et de rang $r = s + t$) est congruente à la forme définie par $q(x) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$ quel que soit $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$.

Dém: elle est analogue au cas des formes complexes (exercice).

(6) Discriminant d'une forme quadratique

Proposition: si q est une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, le déterminant de sa matrice dans une certaine base ne dépend de cette base qu'à un ^{non nul} carré près: si $\underline{e}$ et $\underline{e}'$ sont deux bases, il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; $\det(\text{mat}_{\underline{e}'} q) = \lambda^2 \det(\text{mat}_{\underline{e}} q)$.

Dém: ceci vient du fait que si P est la matrice de changement de base, ie $P = \text{mat}_{\underline{e}}(\underline{e}')$ alors (cf Chap. II-§3 appliqué à la forme polaire de q):

$$\text{mat}_{\underline{e}'} q = P^T \text{mat}_{\underline{e}} q P. \quad \text{Donc } \det(\text{mat}_{\underline{e}'} q) = (\det P)^2 \det(\text{mat}_{\underline{e}} q).$$

Définition: on appelle discriminant d'une forme quadratique le déterminant de sa matrice modulo la multiplication par un carré non nul.

Exemple: $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, x_2) \mapsto ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$,
 de déterminant $\frac{1}{4}(4ac - b^2)$. (Attention, signe opposé au discriminant du polynôme du 2nd degré)

Pour les formes quadratiques complexes, le discriminant vaut 0 pour celles qui sont dégénérées, et 1 pour les autres (celles de rang maximal).

Pour les formes quadratiques réelles, le discriminant vaut 0 pour celles qui sont dégénérées, et $(-1)^t$ pour celles de signature $(n-t, t)$, si $n = \dim E$.

⑦ Point de vue matriciel

Proposition: Deux formes quadratiques sont congruentes si et seulement si leurs matrices sont congruentes. (!)

Dém: Soient q_2 et q_1 deux formes quadratiques de formes polaires b_{q_1} et b_{q_2} .

Soit $\underline{e}$ une base de l'espace, $M_1 = \text{mat}_{\underline{e}} q_1 = \text{mat}_{\underline{e}} b_{q_1}$, $M_2 = \text{mat}_{\underline{e}} q_2 = \text{mat}_{\underline{e}} b_{q_2}$.

- Si q_1 et q_2 sont congruentes, il existe un isomorphisme u de l'espace E tel que $q_2 = q_1 \circ u$. Si $\underline{e}'$ est la base image de $\underline{e}$ par u ,

$$\text{mat}_{\underline{e}} b_{q_2} = (b_{q_2}(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m} = \text{mat}_{\underline{e}'} b_{q_1} = (b_{q_1}(e'_i, e'_j))_{1 \leq i, j \leq m} \text{ puisque } b_{q_1}(e'_i, e'_j) =$$

$$\text{et par ailleurs, } \text{mat}_{\underline{e}'} b_{q_1} = P^T \text{mat}_{\underline{e}} b_{q_1} P,$$

$$\text{où } P = \text{mat}_{\underline{e}}(\underline{e}'). \text{ Donc } M_2 = P^T M_1 P.$$

- Inversement, si $M_2 = P^T M_1 P$ avec P inversible, on définit $\underline{e}'$ la base telle que $P = \text{mat}_{\underline{e}}(\underline{e}')$ et u l'isomorphisme $u: e_j \mapsto e'_j$, i.e. $P = \text{mat}_{\underline{e}} \underline{e}'$.

$$\text{Alors } q_2 = q_1 \circ u: \text{ pour tout } x = \sum_{i=1}^m x_i e_i, \quad u(x) = \sum_{i=1}^m x_i e'_i = \sum_{i=1}^m x'_i e_i,$$

$$q_2(x) = X^T M_2 X = X^T P^T M_1 P X, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad P X = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix},$$

$$(q_1 \circ u)(x) = (X')^T M_1 X', \text{ donc on a bien } q_2(x) = (q_1 \circ u)(x).$$

Proposition: Toute matrice ^{réelle} symétrique est congruente à une matrice diagonale de la forme $\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Δ notation inhabituelle
($x = \text{comp. de base } \underline{e}'$,
 $x' = \underline{e}'$!)

Dém: Si M une matrice symétrique, c'est la matrice de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^m$ définie par $q(x_1, \dots, x_m) = X^T M X$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

Soit (s, t) la signature de q . Alors q a la même signature

que la forme $q_0: (x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$. Elles sont donc

congruentes. Par suite, leurs matrices M et $\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congruentes. □

Le couple (s, t) est aussi appelé signature pour la matrice M : il est bien défini car deux matrices $\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_{s'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{t'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congruentes ssi $s=s'$, $t=t'$.

Ceci vient du fait que la signature d'une forme quadratique est définie de manière intrinsèque, et des propositions précédentes.

Comment déterminer la signature d'une matrice?

- déterminer son rang r : la taille maximale d'un mineur non nul.
- déterminer (s, t) par réduction de Gauss de $q: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i x_j$.

Alternative :

Sylvester

Théorème (critère de Jacobi): soit M une matrice symétrique.

On suppose de plus que tous ses mineurs principaux sont non nuls, i.e.

$\det(m_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. : on dit alors que M est régulière.

On définit alors la suite: $\Delta_0 = 1$, $\Delta_k := \det(m_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.

L'entier t (signature négative ou indice de Morse) de la signature de M est égal au nombre de changements de signes dans $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$.

Exemples: • $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $q(x) = x_1^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$).
ne s'applique pas! car $\Delta_2 = 0$.

• $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $q(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$).
ne s'applique pas non plus! car $\Delta_1 = 0$.

• $M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = \frac{1}{4}(4ac - b^2)$. (matrice de $q(x) = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2$)

* si $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$: $t = 0$.	$q(x) = a \left[\left(x_1 + \frac{b}{2a} x_2 \right)^2 - \frac{1}{4a^2} (b^2 - 4ac) x_2^2 \right]$
* si $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$: $t = 1$	
* si $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$: $t = 1$	
* si $a < 0$, $b^2 - 4ac < 0$: $t = 2$.	

Dém: on remarque que toute matrice symétrique régulière M est de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} S & v \\ \hline v^T & w \end{array} \right) \quad \text{où } S \text{ est symétrique régulière et } w \neq v^T S^{-1} v, \quad v \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(ce qui implique $\det M \neq 0$)

si $M \in M_n(\mathbb{R})$.

(calcul de déterminant par bloc: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\det A) \det(D - CA^{-1}B)$ si A inversible.)

On constate qu'elle est congruente à une matrice diagonale par blocs.

$$M = \left(\begin{array}{c|c} S & v \\ \hline v^T & w \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline v^T S^{-1} & 1 \end{array} \right)}_{P^T} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)}_{P, \text{ inversible}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & S^{-1}v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)}_{P, \text{ inversible}}$$

Donc M et $\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & w - v^T S^{-1} v \end{array} \right)$ ont même signature.

$$w - v^T S^{-1} v = \frac{\det M}{\det S}.$$

On peut ainsi montrer le résultat par récurrence.

- Pour $n=1$: il est immédiat.
- Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat démontré pour toute matrice ^{symétrique} régulière de taille n .
Soit M une matrice ^{sym.} régulière de taille $n+1$. Sa signature est celle de

$$\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & \frac{\det M}{\det S} \end{array} \right).$$

Les mineurs principaux de S sont ceux de M jusqu'à l'ordre n : $\Delta_0, \dots, \Delta_n$. Par hypothèse de récurrence,

la signature négative de S est le nombre de changements de signe dans $\Delta_0, \dots, \Delta_n$.

Celle de M est : • la même si $\frac{\det M}{\det S} > 0$, cād si $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} > 0$.

• en de plus si $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} < 0$.

Donc la signature négative de M est le nombre de changements de signe dans

$$\Delta_0, \dots, \Delta_{n+1}.$$



⑧ Approche spectrale

Une autre alternative est de faire appel à la théorie spectrale et plus précisément à :

Théorème : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée : si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, i.e. telle que $P^T = P^{-1}$, et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = P^{-1} D P$.

cf cours d'algèbre linéaire pour une démonstration. Ici M et D sont semblables et congruentes.

Les coefficients de D sont les valeurs propres de M .

Mise en garde : leur calcul est plus compliqué en général que la réduction de Gauss.

Si les valeurs propres sont connues, le rang de M est le nombre de valeurs propres non nulles, la signature (s, t) est donnée par le nombre de valeurs propres strictement positives (s) et le nombre de valeurs propres strictement négatives (t).

Exemple : $M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

* si $b^2 - 4ac > 0$,

les valeurs propres sont de signes opposés, donc la signature est $(1, 1)$.

Ses valeurs propres sont réelles (d'après le théorème ; on vérifie aussi que le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 - (a+c)X + ac - \frac{b^2}{4}$ est $\Delta = (a-c)^2 + b^2 \geq 0$, quels que soient a, b, c .)

* si $b^2 - 4ac < 0$: les valeurs propres sont de même signe, celui de la trace $a+c$, et la signature est $(2, 0)$ ou $(0, 2)$. Remarque : comme $4ac > b^2 \geq 0$, a et c sont de même signe. On retrouve donc les mêmes cas qu'avec le critère de Jacobi.