

Groupes d'endomorphismes

- Rappel: un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\circ$ telle que :
 - * pour tout $(a, b, c) \in G^3$, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (associativité)
 - * il existe e (élément neutre) tel que pour tout $a \in G$, $a \circ e = e \circ a = a$.
 - * pour tout $a \in G$, il existe $b \in G$ tel que $a \circ b = b \circ a = e$. ($b = a^{-1}$)Le groupe G est dit abélien si : * pour tout $(a, b) \in G^2$, $a \circ b = b \circ a$ (commutativité)

Exemples: - les groupes additifs classiques comme $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ etc sont abéliens, tout comme $(E, +)$ lorsque E est un espace vectoriel.

- si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, par exemple $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des endomorphismes inversibles de E , aussi appelés isomorphismes de E est un groupe pour la loi $\circ$, d'élément neutre id_E .

On le note $GL(E)$, pour groupe linéaire sur E . Pas abélien!

- Un sous-groupe d'un groupe G est un sous-ensemble H de G tel que
 - * $e \in H$
 - * pour tout $(a, b) \in H^2$, $a \circ b \in H$ et $a^{-1} \in H$.

Exemples: - si E est un espace euclidien, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

- si E est un espace hermitien, l'ensemble des endomorphismes unitaires $U(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

- Un sous-groupe H de G est dit distingué (ou normal) s'il est stable par conjugaison, c'est-à-dire : pour tout $h \in H$, pour tout $g \in G$, $g^{-1}hg \in H$.

Exemple: - si E est un espace euclidien, l'ensemble $SO(E) = \{u \in O(E); \det u = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$.

- si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,
 $SL(E) = \{u \in GL(E); \det u = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$,
appelé groupe spécial linéaire

Groupes de matrices

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, $GL_m(\mathbb{K}) = \{A \in M_m(\mathbb{K}); \det A \neq 0\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices. Toujours pas abélien!

- $O_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}); A^T = A^{-1}\}$ est un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{R})$.
- $SO_m(\mathbb{R}) = \{A \in O_m(\mathbb{R}); \det A = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $O_m(\mathbb{R})$.
- $U_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}); A^* = A^{-1}\}$ est un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{C})$.
- $SL_m(\mathbb{K}) = \{A \in M_m(\mathbb{K}); \det A = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GL_m(\mathbb{K})$.
- $SU_m(\mathbb{C}) = \{A \in U_m(\mathbb{C}); \det A = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $U_m(\mathbb{C})$.