Feuille d'exercices 9 : Polynômes d'endomorphismes

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}\right).$$

On note $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) On pose $P(X) = X^2 - 1$. Calculer $P(f)(e_i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2$. En déduire que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

b) Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f)$. Calculer $P(A)$ et retrouver le résultat de la question a.

Exercice 2 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 3$. On pose $D(X) = X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8 = (X-2)^3(X-1)$ et on note f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même définie par : pour tout $Q(X) \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(Q(X))$ est le reste de la division euclidienne de $XQ(X)$ par $D(X)$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par les vecteurs $(X-1)$, $X(X-1)$, $X^2(X-1)$. Vérifier que F est stable par f.

d) Vérifier que $((X-1), X(X-1), X^2(X-1))$ est une base de F et donner la matrice de l'endomorphisme f_F induit par f sur F dans cette base.

Exercice 3 Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(V)$ et soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme annulateur de f. Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, montrer que $P(\lambda) = 0$.

Exercice 4 Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose $P(X) = X^2 - 1$. On se propose de déterminer tous les endomorphismes f de V tels que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

a) Montrer que les seules valeurs propres de f sont 1 et -1.

b) Si $v \in V$, calculer l'image par f de $\frac{1}{2}(v - f(v))$ et de $\frac{1}{2}(v + f(v))$.

c) Montrer que V est somme directe de $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$.

d) En déduire que f est diagonalisable. Déterminer $\dim E_1(f)$ et $\dim E_{-1}(f)$ en fonction de $\text{Tr}(f)$ et $\dim(V)$.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tel que $P(A) = 0$. Soit Δ le discriminant de P.

a) On suppose que $\Delta \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

b) On suppose que $\Delta = 0$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A est une matrice scalaire (de la forme λI_n pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$).

c) Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable et d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tels que $P(A) = 0$.

Exercice supplémentaire d'entraînement

Exercice 6 Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 3 & 4375 \\ 0 & 1-i & \pi & 6389 \\ 0 & 0 & -1+i & e+\pi \\ 0 & 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

a) Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$.

b) Montrer que M est annulée par le polynôme $X^4 + 4$.

c) Montrer que $X^4 + 4$ est le polynôme de plus petit degré annulant M.

Exercice 7 Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose $P(X) = X^2 - X$. On se propose de déterminer tous les endomorphismes f de V tels que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

a) Montrer que les seules valeurs propres de f sont 1 et 0.

b) Montrer que V est somme directe de $E_1(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

c) En déduire que f est diagonalisable. Déterminer $\dim E_1(f)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(f)$ et $\dim(V)$.

Exercice 8 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f.

a) Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par $P(f)$.

b) Soit $P \in K[X]$ tel que $P(\lambda) \neq 0$. Montrer que $P(f)_{E_\lambda(f)}$ est inversible, où $P(f)_{E_\lambda(f)}$ désigne l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par $P(f)$.

c) En déduire que, si $P(X)$ est un polynôme annulateur de f, alors λ est une racine de$P(X)$.

Exercice à préparer pour la prochaine séance

Exercice 9 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

a) Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) En calculant son polynôme caractéristique, déterminer les dimensions de ses sous-espaces propres.