Algèbre 3 – Feuille 6
Corrigé des exercices pairs

Université Claude Bernard Lyon 1 – L2 Mathématiques

Semestre d'automne 2026–2027

Exercice 2

Énoncé. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = (U, V, W).$$

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.
b) Quelles sont les valeurs propres de A ? Déterminer A^2.

Solution. **a)** Une famille de n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ est une base ssi la matrice de taille $n \times n$, dont les colonnes sont formées par ces vecteurs, a déterminant non-nulle. On doit alors calculer le déterminant de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avec une operation de ligne $L_2 \mapsto L_1 + L_2$ (ajouter la premiére ligne à la deuxiéme) on trouve

$$\det P = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Un calcul direct donne

$$AU = U, \qquad AV = -V, \qquad AW = -W.$$

Les trois vecteurs sont donc propres, associés respectivement à la valeur propre $1, -1, -1$.

b) Les valeurs propres sont exactement 1 et -1. Si une matrice $n \times n$ a valeur propre λ avec vecteur propre v, alors son carré a valeur propre λ^2 avec le même vecteur propre v. Dans notre cas nous avons une base de vecteurs propres. Comme le carré des valeurs propres associées est 1, nous avons $A^2 x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, c.á.d. $A^2 = I_3$.

Exercice 4

Énoncé. Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$, l'espace vectoriel complexe des polynômes de degré au plus 2. On définit

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' + (X + 1)P' + P.$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de f.
b) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

Solution. Le polynôme caractéristique de f est le déterminant de $\lambda \mathrm{id} - f$. Le déterminant d'un endomorphisme se calcule on prenant une base $\mathcal{B}$ et calculant le déterminant de la matrice de l'endomorphisme dans cette base. Le résultat est le même pour n'importe quelle base.

Prenant la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ ou b_1 est le polynôme constant égal à 1, b_2 le polynôme X et b_2 le polynôme X^2. On calcule

$$f(1) = 1, \quad f(X) = X+1+X = 2X+1, \quad f(X^2) = 2(X^2+1)+2X(X+1)+X^2 = 5X^2+2X+2.$$

La matrice de f est dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Comme elle est triangulaire supérieure, son polynôme caractéristique est

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - Mat_{\mathcal{B}}(f)) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

Les valeurs propres sont $1, 2, 5$, toutes simples. Pour trouver les vecteurs propres on peut utiliser la méthode de Gauss pour résoudre les trois systèmes linéaires,

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1, 2, 5$.

Pour $\lambda = 1$ on obtient $y = z = 0$. Donc b_1 correspondant au polynôme 1 est vecteur propre pour $\lambda = 1$.

Pour $\lambda = 2$ on obtient $x = y$, $z = 0$. Donc $b_1 + b_2$ correspondant au polynôme $X + 1$ est vecteur propre pour $\lambda = 2$.

Pour $\lambda = 5$ on obtient $3x = 3y = 2z$. Donc $2b_1 + 2b_2 + 3b_3$ correspondant au polynôme $3X^2 + 2X + 2$ est vecteur propre pour $\lambda = 5$.

Exercice 6

Énoncé. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
b) Montrer que tous les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles et en donner des vecteurs directeurs.
c) Donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(2, -1, 1)$.

Solution. **a)** La matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont les éléments sur la diagonale $1, 2, -1$.

b) Une droite vectorielle est un sous-espace de dimension 1. N'importe quel vecteur non-nulle de cet espace est un vecteur directeur de la droite.

Or, ici les valeurs propres sont distinctes : chacune est donc de multiplicité algébrique 1, et son espace propre est de dimension 1, donc une droite. Un vecteur propre pour la valeur propre est alors un vecteur directeur de la droite.

Pour $\lambda = 1$, $(A - I)(x, y, z)^t = 0$ impose $z = y = 0$; on choisit $v_1 = (1, 0, 0)^t$.

Pour $\lambda = 2$, $(A - 2I)(x, y, z)^t = 0$ impose $z = 0$ et $x = y$; on choisit $v_2 = (1, 1, 0)^t$.

Pour $\lambda = -1$, $(A + I)(x, y, z)^t = 0$ donne $3y - z = 0$ et $2x + y + 3z = 0$, d'où $z = 3y$ et $x = -5y$; on choisit $v_{-1} = (-5, 1, 3)^t$.

Pour obtenir l'ordre demandé des valeurs propres, on place les vecteurs propres dans l'ordre (v_2, v_{-1}, v_1) et pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $AP = P\,\mathrm{diag}(2, -1, 1)$, ce qui donne bien

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(P est inversible car (v_2, v_{-1}, v_1) est une base.)

Exercice 8

Énoncé. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Solution. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre *non-nulle* de $f \circ g$. Soit $v \neq 0$ un vecteur propre associé, donc

$$f(g(v)) = \lambda v.$$

Alors $g(v) \neq 0$ (sinon $\lambda v = 0$), et

$$(g \circ f)(g(v)) = g(f(g(v))) = g(\lambda v) = \lambda g(v).$$

Ainsi λ est valeur propre de $g \circ f$. En échangeant f et g, on obtient la réciproque pour toutes les valeurs propres non nulles.

Il reste à considérer $\lambda = 0$. 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si celui-ci n'est pas inversible. Or $f \circ g$ est inversible si et seulement si f et g sont toutes deux inversibles, ce qui équivaut à l'inversibilité de $g \circ f$. Donc 0 est valeur propre $f \circ g$ ssi il est valeur propre de $g \circ f$.

Ainsi $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.