Algèbre 3 - Feuille 6 - Corrections

Rappels de cours

Soit E, F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Un vecteur $v \in E$ est un **vecteur propre** de f si $v \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.
   Attention, le fait que $v \neq 0$ est important. Le vecteur nul ne peut pas être un vecteur propre.
2. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f s'il existe $v \in E$ non-nul tel que $f(v) = \lambda v$, c'est-à-dire si :
$$\ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0_E\}.$$
3. Soient $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ et $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ deux bases de E. **La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** est la matrice carrée de taille n dont la j-ème colonne est donnée par les coordonnées du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, ie.
$$P := P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left([v'_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [v'_n]_{\mathcal{B}} \right).$$
4. Si $v \in E$ on a $[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'}$ et donc
$$P^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}'}.$$
5. Soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}'_F} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E}$$
   En particulier, si $E = F$, c'est-à-dire si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E} = P^{-1}_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) . P_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E}$$

Exercice 1

Énoncé Pour chacun des endomorphismes $f : E \to E$ suivants et chacune des valeurs de λ listées, donner une base de $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, et dire si λ est valeur propre de f ou non :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.q. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -2x - y \end{pmatrix}$; $\lambda = 0$, puis $\lambda = 1$;
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x - 3y - 3z \\ 3x - y - 3z \\ 3x - 3y - z \end{pmatrix}$; $\lambda = -1$, puis $\lambda = 2$.

Correction

1. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (3x + 2y, -2x - y)$.
   Cas $\lambda = 0$: Déterminons $E_0 = \ker(f - 0\mathrm{Id}) = \ker(f)$.
   On pose $x, y \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}
(x, y) \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0), && \text{(Par déf. du noyau d'une appli. linéaire)} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y & = 0 \\ -2x - y & = 0 \end{cases} && \text{(Par définition de f)}, \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x & = 0 \\ -2x - y & = 0 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2, \\
&\Leftrightarrow x = 0 = y.
\end{aligned}$$
   Ainsi $E_0 = \{(0, 0)\} = \{0_E\}$. Il n'existe donc pas de vecteur v **non-nul** tel que $f(v) = 0 \cdot v$, donc $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } f}$.

Cas $\lambda = 1$: Déterminons $E_1 = \ker(f - 1 \cdot \mathrm{Id}) = \ker(f - \mathrm{Id})$.
On pose $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$(x,y) \in \ker(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x,y) - \mathrm{Id}(x,y) = (0,0), \quad \text{(Par déf. du ker)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - x &= 0 \\ -2x - y - y &= 0 \end{cases} \quad \text{(Par définition de f et Id),}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \quad \text{(en simplifiant le calcul)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= 0 \quad L_1 \leftarrow 1/2 L_1 \\ 0 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -y,$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (en remplaçant x par -y)}$$

Ainsi

$$E_1 = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Une base de E_1 est donc $((-1,1))$. De plus 1 est bien valeur propre (car $E_1 \neq \{(0,0)\}$).

2. Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (5x - 3y - 3z, 3x - y - 3z, 3x - 3y - z)$.
Cas $\lambda = -1$: Déterminons $E_{-1} = \ker(f - (-1)\mathrm{Id}) = \ker(f + \mathrm{Id})$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a

$$(x,y,z) \in \ker(f+\mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x,y,z) + (x,y,z) = (0,0,0), \quad \text{(Par déf. du ker)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 3z + x &= 0 \\ 3x - y - 3z + y &= 0 \\ 3x - 3y - z + z &= 0 \end{cases} \quad \text{(Par déf. de f et Id),}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y - 3z &= 0 \\ 3x - 3z &= 0 \\ 3x - 3y &= 0 \end{cases} \quad \text{(en simplifiant le calcul),}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ z &= x \quad \text{(en exprimant z en fonction de x)} \\ y &= x \quad \text{(en exprimant y en fonction de x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = x = z,$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (en remplaçant y,z par x)}$$

Ainsi

$$E_1 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Une base de E_1 est donc $((1,1,1))$. De plus -1 est valeur propre de f (car $E_{-1} \neq \{(0,0)\}$).

Cas $\lambda = 2$: Déterminons $E_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a

$$(x,y,z) \in \ker(f-2\mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x,y,z) - 2(x,y,z) = (0,0,0), \quad \text{(Par déf. du ker)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 3z - 2x &= 0 \\ 3x - y - 3z - 2y &= 0 \\ 3x - 3y - z - 2z &= 0 \end{cases} \quad \text{(Par déf. de f et Id)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 3z &= 0 \\ 3x - 3y - 3z &= 0 \\ 3x - 3y - 3z &= 0 \end{cases} \quad \text{(en simplifiant le calcul)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y-3z &= 0 \\ 0 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y + z$, (en exprimant x en fonction de y,z)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(en remplaçant x par y+z)

Ainsi

$$E_1 = \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi la famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ engendre E. C'est de plus une famille libre (on a ici une famille de 2 vecteurs qui ne sont pas multiples l'un de l'autre). Une base de E_1 est donc $((1,0,1),(1,1,0))$. Enfin -1 est bien valeur propre (car $E_{-1} \neq \{(0,0)\}$).

Exercice 3

Énoncé Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A.
2. Soit $u = 2u_1 - u_2$. Résoudre $AX = u$.

Remarque Pour répondre à la première question il faut montrer deux choses : d'une part que $\mathcal{B}$ est une base, d'autre part que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres pour A.

Correction

1. Montrons que u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de A.
Il faut donc montrer qu'il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $Au_1 = \lambda u_1$ et $Au_2 = \lambda' u_2$. Pour cela, on commence par calculer Au_1 et Au_2. On a :

$$Au_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Au_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Or, on remarque que $(4,2) = 2(2,1) = 2u_1$, donc $Au_1 = 2u_1$. Comme $u_1 \neq (0,0)$ on a donc u_1 vecteur propre de A pour la valeur propre 2. De même on note $(3,3) = 3(1,1) = 3u_2$ donc u_2 vecteur propre de A pour la valeur propre 3.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est une base.
→ *Méthode 1 (avec le déterminant)* On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Le déterminant de la matrice dont les vecteurs colonnes sont u_1, u_2 est donc non-nul. Ainsi (d'après le Th 3.21 du cours) (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
→ *Méthode 2 (en revenant à la définition)* Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 &= 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2.$$

La famille $\{u_1, u_2\}$ est donc libre. Comme elle comporte 2 vecteurs elle engendre donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$. Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Donc $\{u_1, u_2\}$ est aussi génératrice de $\mathbb{R}^2$. Cette famille forme donc une base.

2. Résolvons $AX = U$ où $U := 2u_1 - u_2$. On note $[X]_{\mathcal{B}_c} = (x, y)$ les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Méthode 1 : Avec un changement de base On va utiliser ici le fait que (u_1, u_2) est une base de vecteurs propres de A pour résoudre l'équation dans cette base-ci avant de revenir à $\mathcal{B}_c$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est A. Autrement dit, f est telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = A.$$

D'après la question précédente, u_1 est un vecteur propre de A (et donc de f) pour la valeur propre 2 et u_2 est un vecteur propre de A (et donc de f) pour la valeur propre 3. Autrement dit

$$f(u_1) = 2u_2 = 2u_1 + 0u_2 \qquad f(u_2) = 3u_2 = 0u_1 + 3u_2$$

Ainsi, d'après la définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Remarque : On pouvait aussi calculer la matrice de passage, son inverse et appliquer la formule de changement de base, mais c'était plus long.) De plus comme $U = 2u_1 - u_2 = 2 \cdot u_1 + -1 \cdot u_2$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $[U]_{\mathcal{B}} = (2, -1)$. Notons (a, b) les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$, *i.e.* $[X]_{\mathcal{B}} = (a, b)$ et notons $P = P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. On rappelle (voir Rappels, item 5) que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$. Alors

$$\begin{aligned} A[X]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}} &\Leftrightarrow P^{-1}A[X]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[U]_{\mathcal{B}} \quad \text{(Mult. par } P^{-1}\text{)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}A[X]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}'} \quad \text{(Rappels, item 4)} \end{aligned}$$

Mais $P^{-1}A[X]_{\mathcal{B}} = P^{-1}APP^{-1}[X]_{\mathcal{B}} = \left(P^{-1}AP\right)P^{-1}[X]_{\mathcal{B}}$.
Or $P^{-1}[X]_{\mathcal{B}} = [X]_{\mathcal{B}'} = (a, b)$ (voir Rappels, item 4) et de plus $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. En appliquant ces égalités aux équivalences précédentes on obtient donc que

$$\begin{aligned} A[X]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}} &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,[X]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}'} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow 2a = 2 \text{ et } 3b = -1, \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -1/3. \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, -1/3)$. Pour obtenir ses coordonnées dans la base canonique on peut, ou bien

— Appliquer la matrice de passage en utilisant la formule $[X]_{\mathcal{B}} = P[X]_{\mathcal{B}'}$;
— Ou bien utiliser la définition des « coordonnées d'un vecteur dans une base » : Le fait que les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ soient $(1, -1/3)$ signifie que $X = 1 \cdot u_1 + (-1/3) \cdot u_2$. C'est-à-dire que

$$[X]_{\mathcal{B}_c} = 1 \cdot [u_1]_{\mathcal{B}_c} + (-1/3) \cdot [u]_{\mathcal{B}_c} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas on obtient $[X]_{\mathcal{B}_c} = (5/3, 2/3)$. Et donc le système admet une unique solution qui est :
le vecteur ayant pour coordonnées dans la base canonique $(5/3, 2/3)$.

Méthode 2 : Avec une équation sur les coordonnées On a $u = 2u_1 - u_2$. Donc les coordonnées de u dans la base canonique sont $2(2,1) - (1,1) = (3,1)$. On cherche à déterminer les valeurs de x, y telles que $AX = U$. Or

$$AX = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 3 \\ -x + 4y & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y & = 4 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -x + 4y & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = 4/6 = 2/3, \\ x & = 4y - 1 = 8/3 - 3/3 = 5/3. \end{cases}$$

Ainsi le système admet une unique solution : le vecteur ayant pour coordonnées dans la base canonique $(5/3, 2/3)$.

Exercice 5

Énoncé Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f et la dimension de son noyau. En déduire que 0 est valeur propre de f.
2. Vérifier que le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de f.
3. Construire une base $\mathcal{B}$ constituée de vecteurs propres de f, donner la matrice de f dans cette base et déterminer toutes les valeurs propres de f.

Rappels

1. Le **rang** de f est la dimension de son image, ie. $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{im}(f)$.

2. Pour déterminer le rang de f :

   — *Méthode 1 (en échelonnant la matrice)* écrire la matrice de f dans une base donnée (ici ce sera la base canonique) puis l'échelonner avec la méthode du pivot de Gauss. Le rang de la matrice sera égal au nombre de lignes non-identiquement nulles de la matrice échelonnée obtenue.
   — *Méthode 2 (calcul explicite)* Déterminer une base de l'image de f.

Correction

1. Déterminons le rang de f.
Méthode 1 Échelonnons la matrice A. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_i \leftarrow L_i - L_1,\ i = 2,3,4$$

La matrice sous forme échelonnée a une seule ligne non-nulle, elle est donc de rang 1. Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}$.

En utilisant la méthode 2 : on va montrer que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$ Soit $v := (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ x+y+z+t \\ x+y+z+t \\ x+y+z+t \end{pmatrix} (x+y+z+t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $Av \in \mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$. Autrement dit $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$. Mais $A \neq 0$, la matrice est donc de rang au moins 1, c'est à dire que $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 1$. En combinant avec ce qui précède on obtient donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$ et ainsi $\boxed{f \text{ est de rang } 1}$.

Déterminons la dimension du noyau de f.
D'après le théorème du rang, on a $\dim\ker(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg}(f) = 4 - 1 = 3$. Ainsi $\boxed{\dim\ker(f) = 3}$. Le noyau de f étant de dimension 3, il existe donc un vecteur non-nul dans $\ker(f)$, c'est-à-dire un vecteur $v \neq 0$ tel que $f(v) = (0,0,0,0)$. Mais $(0,0,0,0) = 0v$. Donc v est vecteur propre pour la valeur propre 0.

2. Soit $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Alors v a pour coordonnées $(1,1,1,1)$ dans la base canonique. Mais

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $f(v) = 4v$. Comme $v \neq (0,0,0,0)$, on a donc v vecteur propre de f pour la valeur propre 4.

3. On va construire une base $\mathcal{B}$ composée de $u := (1,1,1,1)$ et d'une base du noyau de f.
Soit $v := (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} v \in \ker(f) \Leftrightarrow Av = 0_{\mathbb{R}^4} &\Leftrightarrow x+y+z+t = 0, \\ &\Leftrightarrow x = -y-z-t, \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On pose $v_1(-1,1,0,0)$, $v_2 = (-1,0,1,0)$, $v_3 = (-1,0,0,1)$. On a ainsi $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. De plus la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, donc elle forme une base de $\ker(f)$.
De plus, les sous-espaces propres étant en somme directe (cf. cours Co-

rollaire 4.22) on a donc (u, v_1, v_2, v_3) qui est une base de $\mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)$. Or

$$\dim\big(\mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)\big) = \dim\big(\mathrm{im}(f)\big) \dim\big(\ker(f)\big) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Ainsi $\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Donc $\boxed{\mathcal{B} := (u, v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.
Comme $f(u) = 4u$ et que $f(v_i) = 0v_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a (en utilisant la définition de matrice d'un endomorphisme dans une base)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc montré qu'il existait une base, notée $\mathcal{B}$, de vecteurs propres de f. Les valeurs propres de f sont les coefficients diagonnaux de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont donc } 0 \text{ et } 4.}$

À retenir

$$\begin{aligned} 0 \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \ker(f) \neq \{0\}, \\ &\Leftrightarrow \exists v \in E \backslash \{0_E\} \ : \ f(v) = 0_F, \\ &\Leftrightarrow f \text{ n'est pas injective.} \end{aligned}$$