Feuille 5 - Exercice 7 : Correction.

Rappel: définition (Endomorphisme) Soit E un espace vectoriel.
Un endomorphisme de E est une application linéaire $\varphi : E \to E$
c'est-à-dire une application $\varphi : E \to E$ telle que
$\forall v, w \in E \quad \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$
$\forall \lambda \in K \ \forall v \in E \quad \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Montrons que $\phi : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^1 e^{x-t} f(t)\,dt \right]$
est un endomorphisme

Rq : il faut montrer ① $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \phi(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
② ϕ est linéaire.

Montrons ① :
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors f est bornée sur $[0,1]$
en particulier $\int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :
$$\phi(f)(x) = \int_0^1 e^{x-t} f(t)\,dt = \int_0^1 e^x e^{-t} f(t)\,dt = e^x \times \int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt.$$

Comme $\begin{cases} (x \mapsto e^x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \text{et } \int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt \in \mathbb{R} \end{cases}$ on a bien que $\left[x \mapsto e^x \int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt \right]$
est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ainsi : $\phi(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Montrons ② : $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\phi(f+\lambda g) : x \mapsto \int_0^1 e^{x-t} (f+\lambda g)(t)\,dt.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\phi(f+\lambda g)(x) = \int_0^1 e^{x-t} \left(f(t) + \lambda g(t) \right) dt = \int_0^1 e^{x-t} f(t) + \lambda \times e^{x-t} g(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 e^{x-t} f(t)\,dt + \lambda \int_0^1 e^{x-t} g(t)\,dt$$
$$= \phi(f)(x) + \lambda \phi(g)(x).$$

Donc ϕ est bien linéaire

Conclusion: ϕ est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Rappel: valeurs propres, vecteurs propres: Soit E un espace vectoriel et soit φ un endomorphisme de E. Un vecteur propre de φ est un vecteur $v \in E$ tel que : $\begin{cases} v \neq 0_E \\ \exists \lambda \in K : \varphi(v) = \lambda v \end{cases}$.
Si v est un vecteur propre, le scalaire λ tq $\varphi(v) = \lambda v$ est appelé valeur propre de φ.

Remarque: ici $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
↳ les vecteurs sont donc des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$

on cherche donc les $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \phi(f) = \lambda f$.
autrement dit on cherche un tel f et λ tels que:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^1 e^{x-t} f(t)\,dt = \lambda f(x).$$

- Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\phi(f) = \lambda f$ (3)
Alors $\phi(f)' = (\lambda f)' = \lambda \times (f')$ (1)
mais :
$$\phi(f)'(x) = e^x \int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt = \phi(f)(x) \quad (2)$$

(Détails: en effet $\phi(f)(x) = e^x \underbrace{\int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt}_{\text{une constante réelle}}$
↑ Sa dérivée est $x \mapsto e^x$

La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto c \times e^x$ (c constante) est : $x \longmapsto c \times e^x$

Donc $\phi(f)'(x) = e^x \times \int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt$.)

En combinant (1) et (2) on obtient
$$\lambda f'(x) = \phi(f)'(x) = \phi(f)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
Et donc d'après (3)
$$\lambda f'(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Distinguons 2 cas:
<u>cas 1 $\lambda \neq 0$</u> si $\lambda \neq 0$ alors on a $f'(x) = f(x)$

Et donc $\exists C \neq 0$: $f(t) = Ce^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas on a donc :

$$\phi(f)(x) = e^x \int_0^1 e^{-t} \times Ce^t dt = C \times e^x \int_0^1 e^{-t+t} dt$$

$$= Ce^x \int_0^1 1 \, dt = Ce^x = f(x)$$

Ainsi on a que $f : x \mapsto Ce^t$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$.

<u>Cas 2 : $\lambda = 0$</u> Si $\lambda = 0$ on a donc :

$$\phi(f)(x) = e^x \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = 0 \times f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, en évaluant l'égalité précédente en $x = 0$, on a :

$$\underbrace{e^0}_{=1} \times \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = 0.$$

Bilan : on a deux valeurs propres 0 et 1 ie. $\text{Spec}(\phi) = \{0, 1\}$

Sous espace propre associé à la val. propre 1 :

$$E_1(\phi) = \{ x \mapsto Ce^x : C \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ x \mapsto e^x \}$$

← Rq : c'est un espace de dimension 1

Sous-espace propre associé à la val. propre 0 :

$$E_0(\phi) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = 0 \right\}$$

Rq : ici on a un espace de dimension infinie