Feuille d'exercices 5 : Déterminants, suite et fin

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ avec $adf \neq 0$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la comatrice de A.

b) Calculer l'inverse de A en utilisant la formule de Cramer.

1. Le cofacteur de position (i, j) est $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j. En calculant les neuf cofacteurs :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} df & 0 & 0 \\ -bf & af & 0 \\ be - cd & -ae & ad \end{pmatrix}.$$

2. Puisque A est triangulaire, $\det A = adf$. La formule de Cramer s'écrit $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}(A)$, donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

a) Par des opérations sur les lignes de A_n, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\det(A_n) = \det(A_{n-1})$.

b) En déduire la valeur de A_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Pour $n \geq 2$, effectuer $-L_1 + L_j \to L_j$ for $j \geqslant 2$. La premiere colonne devient $(1, 0 \ldots, 0)$, sans changer le déterminant. Un développement suivant cette colonne.

$$\det A_n = \det A_{n-1}.$$

Comme $A_1 = (1)$ et donc $\det A_A = 1$, on obtient par récurrence $\det A_n = 1$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, A_n est inversible.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $x, y \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul. En les plaçant en colonnes :

$$D = \begin{vmatrix} 2x & x & x \\ x & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la deuxième ligne :

$$D = -x \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2x & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - xy = x(x-y).$$

Ainsi, trois vecteurs forment une base si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq y$.

Exercice 4 Les nombres 111, 148 et 481 sont divisibles par 37. Sans le calculer, montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 37.

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Notons les colonnes de D par C_1, C_2, C_3. On remplace la colonne C_3 par $100C_1 + 10C_2 + C_3$, ce qui ne change pas le determinant et tous les coefficients de cette nouvelle troisiéme colonne sont divisible par 37.

$$100C_1 + 10C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 111 \\ 148 \\ 481 \end{pmatrix}.$$

Donc $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 111 \\ 1 & 4 & 148 \\ 4 & 8 & 481 \end{vmatrix} = 37 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 13 \end{vmatrix}$. Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 13 \end{vmatrix} \in \mathbb{Z}$. 37 est un diviseur de $\det D$.

Exercice 5 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Si $AB = 0$, alors $\det A \det B = \det(AB) = 0$. Cela montre seulement qu'au moins l'un des déterminants est nul. Pour obtenir les deux conclusions, on utilise les hypothèses

$A \neq 0$, $B \neq 0$. Si A était inversible, $AB = 0$ impliquerait $B = A^{-1}0 = 0$, contradiction. Donc $\det A = 0$. De même, si B était inversible, $AB = 0$ donnerait $A = 0$, contradiction. Ainsi

$$\det A = \det B = 0.$$

Exercice 6 a) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 5 \\ z & 3 & 6 \end{vmatrix}$ pour x, y, z réels.

b) Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Montrer que le sous-espace V de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v est de dimension 2 et que $w \in V$ si et seulement si la famille (w, u, v) est liée.

c) En déduire une équation cartésienne de V.

1. En développant selon la première colonne :

$$\begin{aligned} D &= \det \begin{pmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 5 \\ z & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= x(12 - 15) - y(6 - 12) + z(5 - 8) \\ &= -3x + 6y - 3z. \end{aligned}$$

2. Les vecteurs $u = (1, 2, 3)^t$ et $v = (4, 5, 6)^t$ ne sont pas colinéaires : leurs deux premières coordonnées donneraient, en cas de colinéarité, $4/1 = 5/2$, ce qui est faux. Ainsi $\dim V = 2$.

   Si $w \in V$, alors w est combinaison linéaire de u, v et (w, u, v) est liée. Réciproquement, si (w, u, v) est liée, il existe α, β, γ, non tous nuls, tels que $\alpha w + \beta u + \gamma v = 0$. Puisque u, v sont libres, on a nécessairement $\alpha \neq 0$; donc $w = -\frac{\beta}{\alpha}u - \frac{\gamma}{\alpha}v \in V$.
3. Pour $w = (x, y, z)^t$, l'appartenance à V équivaut à l'annulation du déterminant calculé en a). Par conséquent

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Montrer que si A est inversible, alors n est pair.

Comme A est antisymétrique, on a

$${}^tA = -A.$$

En prenant les déterminants des deux membres, on obtient

$$\det({}^tA) = \det(-A).$$

Or, on sait que

$$\det({}^tA) = \det(A) \quad \text{et} \quad \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Ainsi,

$$\det(A) = (-1)^n \det(A).$$

Puisque A est inversible, $\det(A) \neq 0$. On peut donc simplifier par $\det(A)$, ce qui donne

$$(-1)^n = 1.$$

Par conséquent, n est pair.

Exercice 8 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout nombre complexe $x \in \mathbb{C}$, on note $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer $\Delta_{n+2}(x) - \Delta_{n+1}(x)$ en fonction de $\Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x)$.

b) En déduire la valeur de $\Delta_n(x)$.

a) Pour tout $n \geqslant 1$, on considère

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

En développant $\Delta_{n+2}(x)$ suivant la première ligne, puis le déterminant auxiliaire suivant sa première colonne, on obtient

$$\Delta_{n+2}(x) = (1+x^2)\Delta_{n+1}(x) - x^2\Delta_n(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta_{n+2}(x) - \Delta_{n+1}(x) &= x^2\Delta_{n+1}(x) - x^2\Delta_n(x) \\ &= x^2(\Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta_{n+2}(x) - \Delta_{n+1}(x) = x^2(\Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x)).$$

b) On calcule les premiers termes :

$$\Delta_1(x) = 1 + x^2$$

et

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4.$$

Donc

$$\Delta_2(x) - \Delta_1(x) = x^4.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, posons

$$u_n = \Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x).$$

D'après la question précédente,

$$u_{n+1} = x^2 u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison x^2 et de premier terme $u_1 = x^4$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = x^{2n+2}.$$

On en déduit que

$$\Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x) = x^{2n+2}.$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \Delta_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta_{k+1}(x) - \Delta_k(x)) \\ &= 1 + x^2 + \sum_{k=1}^{n-1} x^{2k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\Delta_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}.$$

En utilisant la somme d'une suite géométrique, on obtient

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}, & x \neq \pm 1, \\ n + 1, & x = \pm 1. \end{cases}$$

Exercice 9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et soit $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.

a) Montrer que si $\det(A) = 0$ alors $\det(\mathrm{Com}(A)) = 0$.

b) Montrer que si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0$.

c) Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.

a) Si $A = 0$ alors par définition $\mathrm{Com}(A)) = 0$. Supposons que $A \neq 0$ et que $\det A = 0$.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\det(\mathrm{Com}(A)) \neq 0$. Donc $\mathrm{Com}(A)$ est inversible est donc ${}^t\mathrm{Com}(A)$ l'est aussi.

On multiplie à droite l'equation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$ par l'inverse de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ on obtient donc $A = \det A({}^t\mathrm{Com}(A))^{-1}$. Puisque $\det A = 0$ on obtient $A = 0$ contradiction. Ainsi $\det(\mathrm{Com}(A)) = 0$.

b) Les coefficients de $\mathrm{Com}(A)$ sont, au signe près, les mineurs d'ordre $n-1$ de A.

Or, si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, tous les mineurs d'ordre $n-1$ sont nuls.

Par conséquent,

$$\mathrm{Com}(A) = 0.$$

c) Puisque $\mathrm{rg}(A) = n-1$, on a $\det(A) = 0$. L'identité

$$A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$$

donne donc

$$A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = 0.$$

Ainsi, toutes les colonnes de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ appartiennent au noyau de A.

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}\, A) = n - \mathrm{rg}(A) = 1.$$

On en déduit que

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leqslant 1.$$

D'autre part, comme $\mathrm{rg}(A) = n-1$, il existe au moins un mineur d'ordre $n-1$ non nul. Par conséquent,

$$\mathrm{Com}(A) \neq 0,$$

et donc

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \geqslant 1.$$

Finalement,

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1.$$

Exercice 10 Déterminer une équation cartésienne du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Notons $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Les trois vecteurs sont donc linéairement indépendants et $\dim(F) = 3$.

Soit $w = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. $w \in F$ si et seulement si la famille (u_1, u_2, u_3, w) est lié si et seulement si $\det[u_1\, u_2\, u_3\, w] = 0$. Or après calcul, $\det[u_1\, u_2\, u_3\, w] = -13x - 16y - z + 12t$.

Par conséquent, une équation cartésienne de F est

$$\{13x + 16y + z - 12t = 0.$$

Autrement dit,

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 13x + 16y + z - 12t = 0\right\}.$$