

**Feuille d'exercices 5 : Déterminants, suite et fin**

**Exercices à traiter en TD**

**Exercice 1** Soient  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  avec  $adf \neq 0$  et soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ .

- a) Déterminer la comatrice de  $A$ .
- b) Calculer l'inverse de  $A$  en utilisant la formule de Cramer.

**Exercice 2** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ .

- a) Par des opérations sur les lignes de  $A_n$ , montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\det(A_n) = \det(A_{n-1})$ .
- b) En déduire la valeur de  $A_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Exercice 3** Pour quelles valeurs de  $x, y \in \mathbb{R}$  les vecteurs  $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 4** Les nombres 111, 148 et 481 sont divisibles par 37. Sans le calculer, montrer que le déterminant  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$  est divisible par 37.

**Exercice 5** Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $AB = 0$ ,  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ . Montrer que  $\det(A) = \det(B) = 0$ .

**Exercice 6** a) Calculer le déterminant  $\begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 5 \\ z & 3 & 6 \end{vmatrix}$  pour  $x, y, z$  réels.

- b) Soient  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Montrer que le sous-espace  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $u$  et  $v$  est de dimension 2 et que  $w \in V$  si et seulement si la famille  $(w, u, v)$  est liée.

c) En déduire une équation cartésienne de  $V$ .

### Exercices supplémentaires d'entraînement

**Exercice 7** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique, c'est-à-dire telle que  ${}^t A = -A$ . Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $n$  est pair.

**Exercice 8** Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout nombre complexe  $x \in \mathbb{C}$ , on note  $\Delta_n(x)$  le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

- Pour  $n \geq 1$ , exprimer  $\Delta_{n+2}(x) - \Delta_{n+1}(x)$  en fonction de  $\Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x)$ .
- En déduire la valeur de  $\Delta_n(x)$ .

**Exercice 9** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  et soit  $\text{Com}(A)$  la comatrice de  $A$ .

- Montrer que si  $\det(A) = 0$  alors  $\det(\text{Com}(A)) = 0$ .
- Montrer que si  $\text{rg}(A) \leq n-2$ , alors  $\text{Com}(A) = 0$ .
- Montrer que si  $\text{rg}(A) = n-1$ , alors  $\text{rg}(\text{Com}(A)) = 1$ .

**Exercice 10** Déterminer une équation cartésienne du sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

### Exercice à préparer pour la semaine suivante

**Exercice 11** Pour chacun des endomorphismes  $f : E \rightarrow E$  suivants et chacune des valeurs données au réel  $\lambda$ , donner une base de  $E_\lambda(f)$  ( $= \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ ), et dire si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  ou non :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -2x-y \end{pmatrix}$ ;  $\lambda = 0$ , puis  $\lambda = 1$ ;
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x-3y-3z \\ 3x-y-3z \\ 3x-3y-z \end{pmatrix}$ ;  $\lambda = -1$ , puis  $\lambda = 2$ .