Feuille d'exercices 4 : Déterminants

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) Soient a, b, c trois entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $(a, b) \circ (b, c) = (a, b, c)$.
On compose les permutations de droite à gauche. La permutation $(a, b) \circ (b, c)$ envoie a sur b, b sur c et c sur a ; elle fixe les autres éléments. C'est donc (a, b, c).

b) Soit $2 \leqslant k \leqslant n$ et soient $a_1, \dots, a_k$ k entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$. Montrer par récurrence sur k que $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_{k-1}, a_k)$.

Pour $k = 2$, la formule est immédiate. Supposons que $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_{k-1}, a_k)$. Alors

$$(a_1, \dots, a_{k+1}) = (a_1, \dots, a_k) \circ (a_k, a_{k+1}).$$

En effet, la composition envoie successivement $a_1 \mapsto a_2, \dots, a_{k-1} \mapsto a_k$, puis $a_k \mapsto a_{k+1}$ et $a_{k+1} \mapsto a_1$. L'hypothèse de récurrence donne la formule voulue.

c) En déduire que si σ est un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

La signature est multiplicative et celle d'une transposition vaut -1. Le produit de $k-1$ transpositions a donc pour signature $(-1)^{k-1}$.

d) Déterminer la signature de l'élément $(3, 4) \circ (1, 2, 7) \circ (5, 8, 9) \in \mathfrak{S}_9$.

Les trois cycles ont pour signatures -1, $+1$, $+1$. Ainsi

$$\varepsilon((3, 4) \circ (1, 2, 7) \circ (5, 8, 9)) = -1.$$

Exercice 2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \ln 3 & 0 \\ \sqrt{2\pi} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels.

1. Pour A, on remarque $L_3 - L_2 = L_2 - L_1 = (3, 3, 3)$: les lignes sont liées, donc $\det A = 0$.
2. Pour B, on développe selon la troisième colonne $\det B = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \ln 3 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}$.
3. Pour C, la troisième ligne vaut $(a+b+c)L_1 - L_2$. Par conséquent $\det C = 0$ pour tous a, b, c.

Exercice 3 Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour A, on échange L_1 et L_2, puis on annule les entrées sous le premier pivot avec les operations $-7L_1 + L_2 \to L_2$ et $-4L_1 + L_3 \to L_3$ et $-3L_1 + L_4 \to L_4$.
   $\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -22 & -32 & -44 \\ 0 & -11 & -16 & -22 \\ 0 & -11 & -16 & -22 \end{vmatrix} = 0$. Les deux dernières lignes sont égales.
2. Pour B, effectuons $-2L_1 + L_2 \to L_2$, $-3L_1 + L_3 \to L_3$, $-2L_1 + L_4 \to L_4$.
   $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ -5 & -7 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.
   En développant suivant la dernière colonne
   $\det B = 1 \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 6 - 2(-6) = 18.$

Exercice 4 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur de $|\det(M)|$.

On a ${}^tMM = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$.
En prenant les déterminants et utilisant $\det M = \det {}^tM$, on a

$$(\det M)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4.$$

Puisque $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$, $|\det M| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Exercice 5 Soit a un nombre réel. Calculer les déterminants des matrices suivantes. Préciser quelles valeurs de a ces matrices sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+2 & 2a+4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(a) & 1 & -\sin(a) \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin(a) & 0 & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

1. Pour A, soustrayons L_1 aux deux autres lignes :
$$\det A = \begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ a^2-1 & 0 \end{vmatrix} = 2(a^2-1).$$
Donc A est inversible exactement lorsque $a \notin \{-1, 1\}$.
2. Pour B, soustrayons L_1 aux lignes 2 et 3 :
$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 2 & 2a+3 \end{vmatrix} = (2a+3) - 2(a+1) = 1.$$
Donc B est inversible pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. Pour C, développons selon la deuxième ligne :
$$\det C = 2\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} = 2(\cos^2 a + \sin^2 a) = 2.$$
Donc C est inversible pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soient a, b, c, d des nombres réels et soit $n > 1$ un entier. Calculer le déterminant des matrices suivantes. Pour quelles valeurs de a, b, c, d sont-elles inversibles ?
$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix},$$

Pour la matrices A, notons que les colonnes 2, 3 et 4 sont identiques. Ainsi $\det A = 0$ et A n'est jamais inversible.

Pour B d'ordre $n > 1$, les coefficients diagonaux valent b et les autres valent a :
$$B = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$
Soustrayons la première ligne à toutes les suivantes. On obtient, pour $i \geq 2$, une ligne avec $a-b$ dans la première colonne, $b-a$ dans la colonne i, et zéro ailleurs. En factorisant $b-a$ dans chacune de ces $n-1$ lignes,
$$\det B = (b-a)^{n-1} \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

les colonnes 2 à n à la première : celle-ci devient $(b+(n-1)a, 0, \dots, 0)^t$. Développement suivant cette colonne :

$$\det B = (b-a)^{n-1}(b+(n-1)a).$$

Ainsi B est inversible si et seulement si $b \neq a$ et $b \neq -(n-1)a$.

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 7 Calculer les racines du polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

(on pourra commencer par simplifier le déterminant par des opérations sur les lignes).

En effectuant $L_2 - 2L_1 \to L_2$ puis $L_3 - 3L_1 \to L_3$, on obtient

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ -1 & -x-2 & -2x-3 \\ -1 & -x-1 & x+5 \end{vmatrix}.$$

Puis $L_3 - L_2 \to L_3$ donne

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ -1 & -x-2 & -2x-3 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix}.$$

Le développement suivant la dernière ligne conduit à

$$P(x) = -\begin{vmatrix} x+2 & 3x+4 \\ -1 & -2x-3 \end{vmatrix} + (3x+8)\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 \\ -1 & -x-2 \end{vmatrix}.$$

Après simplification,

$$P(x) = -3(x+1)^2(x+2).$$

Ses racines sont -2, -1 (racine double).

Exercice 8 a) Développer les polynômes en x suivants :

$$Q_1(x) = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, \quad Q_2(x) = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

b) Proposer une formule pour le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

a) Soustrayons la première ligne à deux autres, puis ajoutons les colonnes 2 et 3 à la première. $\det Q_1(x) = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a-x & x-a & 0 \\ a-x & 0 & x-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2a & a & a \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$
Ainsi $\det Q_1(x) = (x-a)^2(x+2a) = x^3 - 3a^2x + 2a^3$.
Similairement $\det Q_2(x) = (x-a)^3(x+3a) = x^4 - 6a^2x^2 + 8a^3x - 3a^4$.

b) Soustrayons la première ligne à toutes les autres, puis ajoutons les colonnes 2 à n à la première. Le déterminant devient triangulaire, de diagonale $x+(n-1)a, x-a, \ldots, x-a$. Ainsi $\det Q_n = (x-a)^{n-1}(x+(n-1)a)$.
La formule vaut pour tout $n \geq 1$, y compris si $x = a$.

Exercice 9 (Déterminant de Vandermonde) Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels. Pour $j = 1, \cdots, n$, on note v_j le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1})$. On veut calculer le déterminant $V(n)$ de la famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

$$V(n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

a) Exprimer $\det(v_1, v_2 - x_n v_1, v_3 - x_n v_2, \cdots, v_n - x_n v_{n-1})$ en fonction de $V(n)$.

b) En déduire une relation de récurrence entre $V(n)$ et $V(n-1)$.

c) Calculer $V(n)$.

d) En déduire les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x_1 & \cdots & nx_1^{n-1} \\ 1 & 2x_2 & \cdots & nx_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2x_n & \cdots & nx_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & \cdots & x_1^{n-1}+n-1 \\ 1 & x_2+1 & \cdots & x_2^{n-1}+n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+1 & \cdots & x_n^{n-1}+n-1 \end{vmatrix}.$$

1. Les remplacements successifs de colonnes $C_j - x_n C_{j-1} \to C_j$, effectués de droite à gauche pour $j = n, n-1, \ldots, 2$, ne changent pas le déterminant. Le déterminant demandé vaut donc V_n.
2. La dernière ligne de la nouvelle matrice est $(1, 0, \ldots, 0)$. En développant selon cette ligne, le signe est $(-1)^{n+1}$. Pour les $n-1$ autres lignes, les colonnes restantes ont pour termes $x_i^{j-2}(x_i - x_n)$, $j = 2, \ldots, n$. On factorise $x_i - x_n$ de chaque ligne :

$$V_n = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) V_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) V_{n-1}.$$

3. Puisque $V_1 = 1$, une récurrence donne

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Cette formule montre notamment que $V_n \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

4. Dans le premier déterminant, la colonne j est j fois la colonne j de Vandermonde (les indices commencent à 1). Donc

$$\det(j x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n} = n! \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

Dans le second déterminant, les colonnes correspondent aux polynômes $1, x + 1, x^2 + 2, \ldots, x^{n-1} + n - 1$. Retrancher $(j-1)$ fois la première colonne de la colonne j redonne la matrice de Vandermonde. Ainsi

$$\det(x_i^{j-1} + j - 1)_{1 \leq i,j \leq n} = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$