Feuille d'exercices 11 : Trigonalisation

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Pour chacune des matrices suivantes déterminer les sous-espaces propres, les sous-espaces caractéristiques, le polynôme minimal et déterminer si elles sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

a) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.

c) Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 3 Pour chacune des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques ;

b) La mettre sous la forme PTP^{-1} où P est inversible et T triangulaire supérieure.

c) Déterminer les polynômes caractéristiques et polynômes minimaux.

Exercice 4 Répondre par oui ou par non aux assertions suivantes. Dans le cas d'une réponse négative, donner un contre exemple.

a) Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

b) Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est simplement scindé.

c) Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

d) Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

e) Une matrice réelle dont les multiplicités géométriques sont égales aux multiplicités algébriques est diagonalisable.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que si $A^{50} = 0_n$, alors $A^n = 0_n$. Que dire si de plus A est diagonalisable ?

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 6 Pour chacune des matrices ci-dessous, répondre aux questions suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$.

b) Calculer les valeurs propres de A et en déterminant un seul sous-espace propre, montrer que A est diagonalisable.

c) Déterminer le polynôme minimal $\pi_A(X)$ de A.

d) En utilisant le polynôme minimal, donner une formule pour A^{-1}.

e) Expliciter une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Exercice à préparer pour la prochaine séance

Exercice 8 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Calculer T^n pour tout $n \geqslant 1$.

b) Si $\lambda \neq 0$, calculer T^{-n} pour tout $n \geqslant 1$.