Feuille d'exercices 10 : Polynôme minimal

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}).$$

a) Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) En calculant son polynôme caractéristique, déterminer les dimensions de ses sous-espaces propres.

Exercice 2 Soient a et b deux nombres complexes distincts. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

a) Calculer J^i pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

b) Montrer que les matrices I_4, J, J^2, J^3 sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

c) En déduire que le polynôme minimal de J est de degré 4.

d) Déterminer le polynôme minimal de J et les valeurs propres de J.

e) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Déterminer son polynôme caractéristique.

Exercice 4 a) Donner un exemple de matrice M telle que $\pi_M(X) \neq \chi_M(X)$. On donnera un exemple de matrice diagonalisable et un exemple de matrice non diagonalisable.

b) Donner un exemple de matrice M telle que $\pi_M(X) = \chi_M(X)$. On donnera un exemple de matrice diagonalisable et un exemple de matrice non diagonalisable.

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^4 = f^2$. On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f.

a) Quelles sont les possibilités pour le polynôme minimal de f ?

b) Montrer que f est diagonalisable.

c) Soit D une matrice diagonale correspondant à f dans une base de E. Quelles sont les possibilités pour D ?

d) Quelles sont les possibilités pour le polynôme caractéristique de f ?

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 6 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = \mathrm{Id}_E$. On note F l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $f(v) = v$ et G l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $f(v) = -v$.

a) Monter que $E = F \oplus G$ (on pourra remarquer que $F = E_1(f)$).

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ pour un entier $0 \leqslant r \leqslant n$.

c) Déterminer les dimensions de F et G en fonction de $\dim E$ et de $\mathrm{Tr}(f)$.

Exercice à préparer pour la prochaine séance

Exercice 7 Pour chacune des matrices suivantes déterminer les sous-espaces propres, les sous-espaces caractéristiques et le polynôme minimal.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$