

## Feuille d'exercices 1 : Révisions d'algèbre linéaire

### Exercices à traiter en TD

**Exercice 1** Soit  $\mathbb{R}_2[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On note  $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ .

- a) Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- b) Déterminer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}}$  de la base  $\mathcal{B}_0$  vers la base  $\mathcal{B}$ .
- c) Déterminer l'inverse de la matrice  $P_{\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}}$  et en déduire  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0}$ .
- d) En déduire les coordonnées de  $X^2$  et de  $(X - 1)^2$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 2** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . On note  $\mathcal{B}$  la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ .

- a) Vérifier que l'application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  définie par  $f(M) = AM$  est une application linéaire.
- b) Déterminer la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- c) Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = (I_2, A, E_{1,1}, AE_{1,1})$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .
- d) Calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ .
- e) Déterminer la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- f) Montrer que  $A$  est inversible et en déduire que  $f$  est un isomorphisme.
- g) Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ .

**Exercice 3** Dans les cas suivants, déterminer la dimension du noyau de  $f$  et en donner une base.

- a)  $f$  est l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4.$$

- b)  $f$  est l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- c)  $f$  est l'application  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

### Exercices supplémentaires d'entraînement

**Exercice 4** Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Pour quelles valeurs de  $r$  les vecteurs  $(r, 1, 1)$ ,  $(1, r, 1)$  et  $(1, 1, r)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 5** Dans chacun des cas suivants, vérifier que la famille  $\mathcal{B}$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  et déterminer les coordonnées du vecteur  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- a)  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- b)  $E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ ,  $v = (1 + X)^3$ .
- c)  $E = \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\mathcal{B} = (1, X + 1, (X + 1)^2)$ ,  $v = X^2$ .
- d)  $E = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $\mathcal{B} = (X - 1, X + 1, X^2 - 1, X^3, X^4 - X^2)$ ,  $v = (X^2 + 1)(X - 1)$ .

**Exercice 6** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y + \alpha z + t \\ x + z + t \\ y + z \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Déterminer, en fonction de la valeur de  $\alpha$ , le noyau et l'image de  $f$  (on en donnera des bases explicites).

### Exercice à préparer pour la semaine suivante

**Exercice 7** Soit  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  une base d'un espace vectoriel  $E$ . On note  $f$  l'unique endomorphisme de  $E$  tel que  $f(v_1) = v_2$ ,  $f(v_2) = v_3$  et  $f(v_3) = v_1$  et  $g$  l'unique endomorphisme de  $E$  tel que  $g(v_1) = v_2$ ,  $g(v_2) = v_1$  et  $g(v_3) = v_3$ .

- a) Donner les matrices des endomorphismes  $f$  et  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- b) Donner les matrices des endomorphismes  $g \circ f$  et  $f \circ g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .