Reduction des endomorphismes!

Soit E un espace vectoriel et $f: E \to E$ un endomorphism notre but de cherche une base B t.q. f dans cette base est représenté par une matrice simple.

Une matrice simple! si $Mat_B(f) = I_n$,

Puisque $Mat_{B'}(f) = P^{-1} Mat_B P$ pour une matrice inversible P, $Mat_{B'}(f) = I_n$. $\forall B'$ base ainsi $f = id$. Donc, forcer $Mat_B(f) = I_n$ trop restrictive. On va demander si on peut trouver une base dans laquelle f est representée par une matrice Diagonale.

Defn: [Diagonalisabilité]

- Soit $f: E \to E$ endomorphisme, on dit que f est diagonalisable $\iff \exists$ une base B de E t.q. $Mat_B(f)$ est diagonale.
- Une matrice A est diagonalisable ssi

$$f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X \longrightarrow AX$$ est diagonalisable.

Condition nécessaire!

s'il existe $B=(v_1,\dots,v_n)$ base t.q.

$$Mat_B(f)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$ alors on a

$\forall i=1..n$ $f(v_i)=\lambda v_i$, puisque B est une base aucun v_i n'est nul.

déf: [Valeur propre, vecteur propre, spectre, espace propre]

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E.

- $\lambda\in\mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non-nul tq $f(v)=\lambda v$.
- un tel vecteur non-nul s'appelle un vecteur propre de f.
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f, noté $Sp(f)$.
- l'ensemble, $E_\lambda(f)$ des vecteurs propres de f, associé à la valeur propre λ est un sous espace vectoriel, car $E_\lambda(f)=\ker(f-\lambda id)$ et est appelé espace propre associé à λ.

défn: (Version matricielle)

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$,

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $X \neq 0$ tq. $AX = \lambda X$
- Un tel vecteur non-nul s'appelle vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- L'ensemble des valeurs propres s'appelle le spectre de A, noté $Sp(A)$.
- L'ensemble des vecteurs propres de A associé à la valeurs propres $E_\lambda(A)$ associé à la valeurs propre λ est un sous espace vectoriel car $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)$ et nommé sous espace propre associé à λ.

déf: [Base Propre]
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E une base de E s'appelle une base propre de f si elle est formé des vecteurs propres de f.

Proposition 11: f est diagonalisable si et seulement si $\exists$ une base propre de f pour E.

dém: ($\Rightarrow$) f est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists$ une base $\mathcal{B}$ tq. $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(\lambda_1 .. \lambda_n)$ c.a.d $v_i \neq 0$ et $\forall v_i \in \mathcal{B}$ $f(v_i) = \lambda_i v_i \Rightarrow v_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

($\Leftarrow$) Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots v_n)$ une base propre donc $\forall i = 1, \dots n$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ tq. $f(v_i) = \lambda_i v_i$ t.q. $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, ainsi f est diagonalisable.

□

Rappelons que deux matrices qui ont associé à un endomorphisme f sont semblable (A et B semblable $\Leftrightarrow \exists P$ inversible tq. $B = P^{-1}AP$)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases pour E alors

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1} \, Mat_{\mathcal{B}}(f) \, P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

où $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = [\,[v_1']_{\mathcal{B}} \dots [v_n']_{\mathcal{B}}\,]$, c.a.d.

$Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ sont semblable.

Proposition 4.2: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible alors

(1) $Sp(A) = Sp(P^{-1}AP)$

(2) $E_\lambda(A) = P \cdot E_\lambda(P^{-1}AP)$. En particulier :
$\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(P^{-1}AP)$.

dém : ($\supseteq$) Soit $\lambda \in Sp(P^{-1}AP) \Rightarrow \exists X \neq 0$ t.q.

$$(P^{-1}AP)X = \lambda X \Rightarrow P(P^{-1}AP)X = P(\lambda X)$$

↑ multip. par P de gauche

$$\Rightarrow (PP^{-1})(AP)X = \lambda PX$$

• associ.

$$\Rightarrow A(PX) = \lambda(PX)$$

assoc. const.

OR P inversible $\Rightarrow$ [si $X \neq 0$, alors $PX \neq 0$]

Ainsi λ est une valeur propre de A avec le vecteur propre PX.

($\subseteq$) Soit $\mu \in Sp(A) \iff \exists Y \neq 0$ tq. $AY = \mu Y$

$$\Rightarrow P^{-1}AY = P^{-1}\mu Y = \mu P^{-1}Y$$

mulhp par P^{-1}

$$\Rightarrow P^{-1}A I_n Y = \mu P^{-1}Y$$

$$\Rightarrow P^{-1}A P P^{-1} Y = \mu P^{-1}Y$$

$$\Rightarrow (P^{-1}AP) P^{-1}Y = \mu (P^{-1}Y)$$

OR P inversible $\Rightarrow [P^{-1}Y \neq 0$ si $Y \neq 0]$

Donc, μ est une valeur propre de A et $P^{-1}Y$ est un vecteur propre associé à μ

Ainsi $\mu \in Sp(A)$.

(2) On voit dans la démonstration de $P^{-1}AP$ alors PX est un vecteur propre de A

On considère $\phi : E_\lambda(P^{-1}AP) \to E_\lambda(A)$

$$X \longrightarrow PX$$

ϕ admet une inverse $\psi : E_\lambda(A) \to E_\lambda(P^{-1}AP)$

$$Y \longmapsto P^{-1}Y$$

Donc, ϕ est un isomorphism en particulière surjective c.ad. $\phi(E_\lambda(P^{-1}AP)) = E_\lambda(A)$

$$P.E_\lambda(P^{-1}AP)$$

En particulière, $\dim E_\lambda(A) = \dim_{E_\lambda}(P^{-1}AP)$.

Remarque: Si X est un vecteur propre de A, associé à λ, $\forall c \in \mathbb{K}^*$, cX est un vecteur propre de A associé à λ. □

$A(cX) = cAX = c(\lambda X) = \lambda cX$. Donc, ($X$ vecteur propre)

$A(cX) = \lambda(cX)$ [$X \neq 0 \Rightarrow cX \neq 0$] Donc, cX est un vec. prop. associé à λ.

Comment trouver les valeurs propres ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow \exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X$.

Notons que $AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$

$\Leftrightarrow X \in \ker(A - \lambda I_n)$

$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}$

(car $X \neq 0$)

$\Leftrightarrow \text{Rang}(A - \lambda I_n) < n$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_A la fonction

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \det(A - xI_n)$$

Thm 4.3 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ est un polynôme de degré n et le coefficient du terme maximal est $(-1)^n$

Remarque : Notons que on peut aussi considérer $\det(xI_n - A)$ au lieu de $\det(A - xI_n)$

seule différence $\det(xI_n - A) = \det(-(A - xI_n))$
$= (-1)^n \det(A - xI_n)$

$\det(xI_n - A)$ est un polynôme unitaire, on fait le choix de $\det(A - xI_n)$ pour raison des simplicité en calcul

dém! Soit $A - xI_n = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ où

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} - x & \text{si } i = j \\ a_{i,j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\det(A - xI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}$$

$$= \underbrace{\prod_{j=1}^{n} b_{j,j}}_{\sigma = id,\ \varepsilon(id) = 1} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}$$

$$= \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (a_{j,j} - x)}_{\text{un poly. de degré } n} + \underbrace{Q(x)}_{\text{contient des termes de degré} < n}$$

De plus le terme maximale à de coeff. $(-1)^n$.

□.

déf: [polynôme caractéristique]
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, le polynôme χ_A s'appelle le polynôme caractéristique de A

Proposition 4.4 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables alors $\chi_A = \chi_B$

dém: A, B semblables $\Leftrightarrow \exists P$ inversible tq $B = P^{-1}AP$.

$$\chi_B = \det(B - xI_n) = \det(P^{-1}AP - xI_n)$$
$$= \det(P^{-1}(A - xPI_nP^{-1})P)$$
$$= \det(P^{-1}(A - xI_n)P)$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - xI_n) \det P$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det P \cdot \det(A - xI_n)$$
$$= \frac{1}{\det P} \cdot \det P \cdot \det(A - xI_n)$$
$$= \det(A - xI_n) = \chi_A. \quad \square$$

(Thm 3.8)

Remarque ① On sait que si A, B deux matrice associé à un endomorphisme f, alors A et B sont semblables car pour β, β' deux bases avec $Mat_\beta(f) = A$ $Mat_{\beta'}(f) = B$

on a la matrice passage P tq.

$$B = P^{-1}AP.$$

l'inverse de ça est vrai aussi c.a.d.
si A, B sont deux matrices semblables alors, $\exists$ un endomorphisme f et il existent des bases γ, γ' tq. $Mat_\gamma(f) = A$ et $Mat_{\gamma'}(f) = B$.
car si A, B semblebles alors $\exists P$, inversible tq. $P^{-1}AP = B$. Soit γ est une base de E et on considère $f : E \to E$ tq. $Mat_\gamma(f) = A$. Soit γ' une base tq. $P_{\gamma \leftarrow \gamma'} = P$
On a donc, $B = Mat_{\gamma'}(f)$.

② $\chi_{Mat_B(f)} = \chi_{Mat_{B'}(f)}$. Le polynôme ne depend pas du choix de base Mais uniquement de f On le note χ_f et on l'appelle le polynôme caractéristique de f

Par remarque 1:

Proposition 45: $n \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{K})$. la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle

est semblable à une matrice diagonale (c.a.d. ∃ P inversible tq. $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale).

dém: A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $f_A : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \longrightarrow AX$ est diagonalisable où f_A est associé à $f : E \to E$ pour un choix de base B. c.a.d. $Mat_B(f) = A$.

f_A est diagonalisable $\overset{\text{Prop 4.1}}{\Leftrightarrow}$ ∃ une base propre B' de f_A pour E

$\Leftrightarrow$ ∃ $P_{B \leftarrow B'} =: P$ inversible tq. $P^{-1}AP = Mat_{B'}(f_A)$ est diagonale. □

Par remarque 2) :

THÉORÈME 4.6 :

(1) Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

(2) les valeurs propres de f sont exactement

les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

dém: (1) λ est une valeur propre pour A

ssi $\exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$

$\Leftrightarrow X \in \ker(A - \lambda I_n)$
$X \neq 0$

$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow$ la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ est une racine de χ_A.

(2) Suit de remarque précedent et de (1)

□.

Exemples:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$Sp(A) = \{\pm 1\}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\chi_B = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ ← pas des racines dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow Sp(B) = \emptyset$