

Trouvez une base pour le noyau et l'image de f où

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1 + x_2 + x_4, x_1 + x_2 - x_3, x_3 + x_4)$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(\vec{x}) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

c.à.d. on cherche $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_4, x_1 + x_2 - x_3, x_3 + x_4) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

c.à.d.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

système linéaire résolution par pivot de Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-l_1 + l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

avec des zéros
inutiles
de récurrence
chaque fois

forme
échelonnée
réduite.

$$\text{Donc, } \text{Ker}(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Soit $x_4 = t$ et $x_2 = s$ on a donc

$$x_3 = -t \quad x_1 = -s - t$$

$$\text{Ker}(f) = \{ (-s-t, s, -t, t) : s, t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ s \underbrace{(-1, 1, 0, 0)}_{v_1} + t \underbrace{(-1, 0, -1, 1)}_{v_2} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Facile à voir que (v_1, v_2) ne sont pas colinéaires donc forment une base pour $\text{Ker}(f)$.

Pour trouver l'image : Soit $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ &= \text{Vect}\left(\overbrace{(1, 1, 0)}^{w_1}, \overbrace{(1, 1, 0)}^{w_2}, \overbrace{(0, -1, 1)}^{w_3}, \overbrace{(1, 0, 1)}^{w_4}\right) \end{aligned}$$

Il nous faut trouver une sous-famille libre de (w_1, w_2, w_3, w_4) . Pour cela on considère la matrice $[w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]$ c'est la même matrice R .

donc même calcul de pivot de Gauss

nous donne $R \xrightarrow[\text{liées}]{\text{opérations}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

le Rang de cette matrice est 2.

donc, on peut choisir deux vecteurs parmi (w_1, w_2, w_3, w_4) qui donne ces de pivots.

Par $\begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & \textcircled{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

↑ ↑ ↑ ↑

soit (w_1, w_3) soit (w_1, w_4) , soit (w_2, w_3) ,
soit (w_2, w_4) forme une base pour $\text{Im}(f)$.

par exemple $B(w_1, w_3) = ((1, 1, 0), (0, -1, 1))$
une base pour $\text{Im}(f)$.