

Groupe Symétrique

GS[1]

déf: X un ensemble, une permutation de X est
une bijection de X vers X .

Pour ce cours, on va considérer le cas où
 X est un ensemble fini de n éléments.

exemple: $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $f: X \rightarrow X$
 $1 \mapsto 2$
 $2 \mapsto 3$
 $3 \mapsto 1$
 $4 \mapsto 4$

on notera les permutation comme

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On notera par $\tilde{S}_n$ l'ensemble des permutation
de X , un ensemble fini de n éléments.

Comme composition de deux bijections est une
bijection, la composition définit une opération
sur $\tilde{S}_n$. c.a.d.

$$\begin{aligned} o: \tilde{S}_n \times \tilde{S}_n &\longrightarrow \tilde{S}_n \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

THM 2.1 $(\tilde{S}_n, o)$ forment "un groupe"
c.a.d. la composition satisfait les
propriétés suivants

(1) associativité: $\forall f, g, h \in \tilde{S}_n \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(2) $\exists$ un élément neutre, id , tq $\forall f \in \tilde{\mathcal{O}}_n$
 $f \circ id = id \circ f = f$

(3) chaque élément possède un symétrique :
 $\forall f \in \tilde{\mathcal{O}}_n, \exists \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{O}}_n$ tq $f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id$

Remarque: théoriquement parlant

- la composée est associative car la composée des applications est associative

- l'application identité étant une bijection est dans $\tilde{\mathcal{O}}_n$ ainsi $\exists$ une identité

- Puisque $\tilde{\mathcal{O}}_n$ contient que des bijections chaque élément possède une inverse

démonstration: (1) associativité :

Soit $f, g, h \in \tilde{\mathcal{O}}_n$

d'un côté $\forall x \in X, (f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

de l'autre $\forall x \in X, f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x)))$

ainsi $\forall x \in X, (f \circ g) \circ h(x) = f \circ (g \circ h)(x)$

$$\Rightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(2) élément neutre: Soit $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

considérons $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\forall f \in \tilde{\mathcal{O}}_n$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

(3) Inverse: Soit $f \in \mathcal{O}_n$ $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$

on consider $\tilde{f} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{just change} \\ \text{les lignes sur} \\ f. \end{matrix}$

$$\tilde{f} \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = \text{id}, \quad f \circ \tilde{f} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} = \text{id}$$

□

exemple: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{en reordonnant}]{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque: la composition n'est pas toujours commutative.

eg. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

THM 2.2: l'ensemble $\mathcal{O}_n$ est fini et de cardinalité $n!$

dém: On va calculer tous les possible bijections sur $\{1, 2, \dots, n\}$ en regardant l'image possible
 $1 \longrightarrow n$ possibilité pour choisir image
 $2 \longrightarrow n-1$ par injectivité il nous reste
 $\vdots$ $n-1$ choix
 $n-1 \longrightarrow 2$

Donc, $n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$ possibilités des bijections sur X .

□.

exemples: $X = \{1\}$ $\tilde{\mathcal{O}}_1 = \{\text{id}\}$ $\text{card } \tilde{\mathcal{O}}_1 = 1$
 $X = \{1, 2\}$ $\tilde{\mathcal{O}}_2 = \{\text{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$, $\text{card } \tilde{\mathcal{O}}_2 = 2! = 2$
 $X = \{1, 2, 3\}$ $\tilde{\mathcal{O}}_3 = \left\{ \text{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\text{card } \tilde{\mathcal{O}}_3 = 3! = 6$

Notons que spécialement, puisqu'il contient que deux éléments $(\tilde{\mathcal{O}}_2, 0)$ forme un groupe commutative tandis que à partir de $n \geq 2$ ce ne serait pas le cas.

Quelques éléments spéciale de $\tilde{\mathcal{O}}_n$

(1) Transposition: Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on considère $\sigma \in \tilde{\mathcal{O}}_n$ tq.

supposons $i < j$ pour écriture $\rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$

σ échange i et j garde fixe tout les autres.

σ s'appelle une transposition, on notera par $\tau_{i,j}$

(2) un k -cycle: soit $2 \leq k \leq n$ et

$$\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq X$$

soit $\sigma: X \rightarrow X$

$$a_1 \rightarrow a_2$$

$$a_2 \rightarrow a_3$$

$$\vdots$$

$$a_{k-1} \rightarrow a_k$$

$$x \mapsto x \quad \forall x \in X \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$$

on notera les k -cycle par $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$

Remarque: (1) une transposition est un 2-cycle

(2) l'inverse de k -cycle est un k -cycle.

Thm 2.3 tous élément de $\mathfrak{S}_n$, $n \geq 2$ s'écrit
comme composition des transpositions.

Remarque: A partir de là on va prendre un langage plus abstrait donc au

lieu de composition des bijections
on va dire produit des permutations

ainsi Thm 2.3 devient

Thm 2.3: tous élément de $\mathfrak{S}_n$, $n \geq 2$ s'écrit
comme un produit de transposition.

démonstration: Récurrence sur n .

I $n=2$ $\mathfrak{S}_2 = \{id, (12)\}$

τ est une transposition donc un produit de proposition.

$$\text{id} = \tau \cdot \tau^{-1} = \tau \cdot \tau \quad \text{donc id est un produit des transpositions.}$$

$\uparrow$
car l'inverse de transposition est soit même.

[H] Supposons que l'assertion est vrai pour le rang n . c.a.d.

tous élément de $\mathcal{S}_n$ s'écrit comme un produit des transpositions.

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_{n+1}, \text{ soit } \sigma(n+1) = n+1 \\ \text{soit } \sigma(n+1) \neq n+1$$

Si $\sigma(n+1) = n+1$ on considère $\sigma' = \sigma|_{\{1, \dots, n\}}$

$$\text{c.a.d. } \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \text{puisque } \sigma(n+1) = n+1 \text{ on peut l'oublier.}$$

ainsi $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ et donc par l'hypothèse

σ' s'écrit comme un produit des transposition

Puisque $\sigma(n+1) = n+1$ ainsi σ s'écrit comme un produit des transpositions.

Si $\sigma(n+1) \neq n+1$ la semaine prochaine!