

exercice: Soit $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = (1, -1, -2)$
trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la
famille (v_1, v_2, v_3) est une base pour $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base
on va d'abord montrer que la famille est
libre.

c.à.d. [Si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$, alors $\lambda_i = 0$
 $\forall i = 1, 2, 3$]

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 (1, 2, 1) + \lambda_2 (0, -1, 1) + \lambda_3 (1, -1, -2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

comme multiplication des matrices le système

devient
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Résolution}$$

par pivot de Gauss.

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} -L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \\ \sim \\ -2L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \\ \downarrow \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Ainsi, le
système a
unique soln
qui est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

on a tous
les pivot
 $\left(\text{Rang}[v_1, v_2, v_3] = 3 \right)$

Donc, la famille est libre.

3 vecteurs libres dans un espace de dim 3 est une base.

CAR Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

$F \subseteq \mathbb{R}^3$ un s.e.v engendré

par (v_1, v_2, v_3) puisque la

famille est libre alors

(v_1, v_2, v_3) libre et géné-

ratrice pour F donc

une base pour F .

Ainsi $\dim F = \text{car}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$

Or, $F \subseteq \mathbb{R}^3$ et $\dim F = \dim \mathbb{R}^3$

implique que $F = \mathbb{R}^3$

Donc, (v_1, v_2, v_3) génératrice

pour $\mathbb{R}^3$, libre et génératrice

donc une base.

exemple : matrice de passage

$\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, -1)$ une autre base pour $\mathbb{R}^2$.

Soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$[u]_{\mathcal{E}} = ? , [u]_{\mathcal{B}} = ?$$

Notons que $u = (a, b) = a e_1 + b e_2$

$$\text{donc } [u]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Comment trouver $[u]_{\mathcal{B}} = ?$

1ère façon : On cherche λ_1, λ_2 t.q.

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \quad \text{dans ce cas}$$

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{Pour trouver explicitement}$$

λ_1, λ_2 . On peut écrire l'éqn

$$(a, b) = \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (1, -1) \quad \text{un système}$$

$$\text{linéaire peut être vu comme } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\det A = -3$, Alors A est inversible et

$$\text{son inverse } A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ainsi $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underset{I_n}{(A^{-1}A)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Donc, $x_1 = \frac{a+b}{3}$, $x_2 = \frac{2a-b}{3}$

Donc, $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 \Rightarrow [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{3} \\ \frac{2a-b}{3} \end{bmatrix}$

2ème façon:

on a $u = a e_1 + b e_2$.

si on a e_1, e_2 en fonction de v_1 et v_2 , on peut écrire remplacer e_i par leur expression comme combinaison linéaire de v_1, v_2 .

comment trouver ces écriture on cherche

$$e_1 = x_1 v_1 + x_2 v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ainsi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc, $x_1 = 1/3$ $x_2 = 2/3$ ainsi

$$e_1 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$$

Similairement si $e_2 = y_1v_1 + y_2v_2$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3} \quad y_2 = -\frac{1}{3}$$

Donc, $e_2 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2$

Ainsi,

$$u = ae_1 + be_2$$

$$= a\left(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2\right) + b\left(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2\right)$$

$$u = \left(\frac{a+b}{3}\right)v_1 + \left(\frac{2a-b}{3}\right)v_2$$

Donc, $[u]_B = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{3} \\ \frac{2a-b}{3} \end{bmatrix}$

Notons que:

$$u = a\left(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2\right) + b\left(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2\right)$$

$$= \left(\frac{a+b}{3}\right)v_1 + \left(\frac{2a-b}{3}\right)v_2$$

$\begin{matrix} e \\ \downarrow \\ B \end{matrix}$

implique

$$[u]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [u]_C$$

$\begin{matrix} e \\ \downarrow \\ C \end{matrix}$

o'appele matrice de passage

Notons aussi que

$$\text{si } [U]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}}_{P_{B \leftarrow e}} [U]_e$$

$$\text{Alors } P_{B \leftarrow e}^{-1} [U]_B = [U]_e$$

$$\text{ainsi } P_{e \leftarrow B} = P_{B \leftarrow e}^{-1}$$

$$\text{est } P_{e \leftarrow B} = [v_1 \ v_2] \quad \boxed{\text{par sa construction}}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

car

$$v_1 = 1e_1 + 2e_2$$

$$v_2 = 1e_1 - 1e_2$$

$$P_{e \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [v_1]_e & [v_2]_e \end{bmatrix}$$
$$= [v_1 \ v_2]$$