Exemple:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (2x+2y-z,\ 2x+5y-2z,\ -x-2y+2y)$

1) f diagonalisable ?

$$Mat_C(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = A \quad \text{où } C = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3 \to C_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{-L_1+L_3 \to L_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$\chi_A = (1-\lambda)\left((5-\lambda)(3-\lambda)-8\right)$

$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 8\lambda + \underbrace{15-8}_{7}\right) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-7)$

$Sp = \{1, 7\}$ $\quad m_{alg}(1) = 2$, $m_{alg}(7) = 1$

$$E_1 = \ker(A - I_n) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0\}$$

$$= \{(x, y, x+2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = Vect((1,0,1),(0,1,2))$$

$m_{geo}(1) = 2 = m_{alg}(1)$

$$E_7 = \ker(A - 7I_n) = \ker \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-5L_3+L_1 \to L_1]{2L_3+L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 24 \\ 0 & -6 & -12 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{6}L_2]{2L_2+L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_2+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$E_7 = \{(x,y,z) : x+z=0,\ y+2z=0\}$

$= \{(-z,-2z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1,-2,1))$

$m_{geo}(7) = 1 = m_{alg}(7)$.

$B = (\overset{v_1}{(1,0,1)}, \overset{v_2}{(0,1,2)}, \overset{v_3}{(-1,-2,1)})$ est une base propre, f diagonalisable.

$P = P_{C \leftarrow B} = [v_1]_C\ [v_2]_C\ [v_3]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

2) Calculer f^n $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^kP^{-1}$ (montré par récurrence le "key point" $A^{k+1} = A^k \cdot A$ et $PD^kP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7^n \\ 0 & 1 & -2\cdot 7^n \\ 1 & 2 & 7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5+7^n & -2+2\cdot 7^n & 1-7^n \\ -2+2\cdot 7^n & 2+4\cdot 7^n & 2-2\cdot 7^n \\ 1-7^n & 2-2\cdot 7^n & 5+7^n \end{pmatrix}$$

$\uparrow \tilde{f}(x,y,z) = A/6 \quad (*)$

$*$

3) Resoudre Soit $X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix} \Rightarrow X'(t)=\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\x_3'(t)\end{pmatrix}$

avec $X'(t)=AX(t)$ avec $X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
où A la matrice precedente.
A diagonalisable $\Rightarrow X'(t)=PDP^{-1}X(t)$

$\Rightarrow \underbrace{P^{-1}X'(t)=DP^{-1}X(t)}$

Note $Y(t)=P^{-1}.X(t) \Rightarrow Y'(t)=P^{-1}.X'(t)$
dérivation est linéaire

Ainsi $Y'(t)=DY(t) \Rightarrow \begin{cases} y_1'(t)=y_1(t) \Rightarrow y_1(t)=\lambda_1 e^t \\ y_2'(t)=y_2(t) \Rightarrow y_2(t)=\lambda_2 e^t \\ y_3'(t)=7y_3(t) \Rightarrow y_3(t)=\lambda_3 e^{7t} \end{cases}$

où $X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow Y(0)=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

c.a.d $y_1(0)=1=y_2(0)$, $y_3(0)=3$.

Donc, $y_1'(t)=\lambda_1 e^t \Rightarrow \lambda_1=1 \Rightarrow y_1(t)=e^t$

$y_2'(t)=\lambda_2 e^t \Rightarrow \lambda_2=1 \Rightarrow y_2(t)=e^t$, $t\in\mathbb{R}$

$y_3'(t)=7\lambda_3 e^t \Rightarrow 7\lambda_3=3 \Rightarrow y_3(t)=\frac{3}{7}e^{7t}$

Donc, $X(t)=PY(t)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t\\e^t\\\frac{3}{7}e^{7t}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t-\frac{3}{7}e^{7t}\\e^t-\frac{6}{7}e^{7t}\\3e^t+\frac{3}{7}e^{7t}\end{pmatrix}$ $t\in\mathbb{R}$ les soln

$x_1(t)=e^t-\frac{3}{7}e^{7t}$
$x_2(t)=e^t-\frac{6}{7}e^{7t}$
$x_3(t)=3e^t+\frac{3}{7}e^{7t}$

Soit u_k, v_k, w_k des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4) $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \\ w_{k-1} \end{pmatrix}$ Trouve u_k en fonction de k, $u_0 = 1 = v_0$, $w_0 = 2$

où A la matrice précédente.

A est diagonalisable

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \\ w_{k-1} \end{pmatrix} \iff P^{-1} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = D\, P^{-1} \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \\ w_{k-1} \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} u'_k \\ v'_k \\ w'_k \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u'_k \\ v'_k \\ w'_k \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u'_{k-1} \\ v'_{k-1} \\ w'_{k-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u'_k = u'_{k-1} & u'_k = 1^k u_0 = 1 \\ v'_k = v'_{k-1} \Rightarrow & v'_k = 1^k v_0 = 1 \\ w'_k = 7 w'_{k-1} \Rightarrow & w_k = 7^k w_0 = 2 \cdot 7^k \end{cases}$$

suites géom.

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u'_k \\ v'_k \\ w'_k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \cdot 7^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \cdot 7^k \end{pmatrix}$$

$u_k = 1 + 2 \cdot 7^k$, $v_k = 1 - 4 \cdot 7^k$, $w_k = 3 + 2 \cdot 7^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$