Corollaire 3.9: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

De plus, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1}$

dém: ($\Leftrightarrow$) Si A est inversible alors

$\exists A^{-1}$ tq $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$

THM 3.8 $\Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1})$

Donc, on a $\det A . \det(A^{-1}) = 1$

Donc $\det A \neq 0$ (car sinon le resultat du produit peut être que zéro)

Et de plus $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1}$

($\Leftarrow$) Reciproquement supposons que A n'est pas inversible. Alors $\ker(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

En particulière. $\exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tq. $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$. Soit $A = [C_1 \dots C_n]$ où C_i les colonnes de A pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$AX \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i C_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ c.ad. les colonnes de A sont LIé. Par Corollaire 3.6, $\det A = 0$ □

Formule de Cramer

défn: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La comatrice de A est la matrice $\mathrm{com}(A)$ de $M_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathrm{Com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

THM 3.10: (1) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a

$${}^t\mathrm{com}(A) \cdot A = A \cdot {}^t\mathrm{com}(A) = \det A \cdot I_n$$

(2) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{com}(A)$.

dém: (1) ${}^t\mathrm{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{j,i}\right)$

$$\underbrace{\left({}^t\mathrm{com}(A) \cdot A\right)_{r,s}}_{x_{i,j}} = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{r+k} \det A_{k,r}\right) \cdot a_{k,s}$$

if $r = s$

$$(x_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} \det(A_{k,r}) \cdot a_{k,r}$$

$$(x_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{k,r} \det(A_{k,r}) = \det(A)$$

if $r \neq s$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+k} \det(A_{k,r}) \cdot a_{k,s}$$

$= \det M$ ← matrice qui a deux colonnes égaux.

$= 0$.

Ainsi $\quad {}^t\text{com}(A).A = \det A\, I_n$.

$A\,{}^t\text{com}(A) = \det A\, I_n$ similaire.

(2) A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (par corollaire 3.9.)

ainsi ${}^t\text{com}(A).A = A\,{}^t\text{com}(A) = \det A\, I_n$

$\Rightarrow \underbrace{\det A \neq 0}_{} \quad \underbrace{\frac{1}{\det A}\,{}^t\text{com}(A).A}_{B} = A\underbrace{\frac{1}{\det A}\,{}^t\text{com}(A)}_{B} = I_n$

$\Rightarrow B = A^{-1}$ ainsi $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\text{com}(A)$ □

exemples: 1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$

$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\text{com}(B) = \begin{pmatrix} +4 & -0 & +0 \\ -8 & +4 & -0 \\ +5 & -4 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

${}^t\text{com}(B) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

déf: Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille dans un espace vectoriel E, et soit B une base de E

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) := \det\left[[v_1]_B \cdots [v_n]_B\right]$$

THM 3.11 : La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base

$$\Leftrightarrow \det_B(v_1, \dots, v_n) = \det\left[[v_1]_B \cdots [v_n]_B\right] \neq 0$$

dém: $(v_1, \dots, v_n)$ est une base $\Leftrightarrow$ c'est libre

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tq $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$

Soit $B = (w_1, \dots, w_n) \Rightarrow v_1 = c_1^1 w_1 + \dots + c_n^1 w_n$

$$v_n = c_1^n w_1 + \dots + c_n^n w_n$$

$\sum \lambda_i v_i = 0_E \Rightarrow$ soit $A = \begin{bmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^n & \cdots & c_n^n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

$$B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

les lignes de $A \cdot B$ sont des vecteurs v_i.

ainsi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \Rightarrow [\lambda_1 \dots \lambda_n]\, A \cdot B = 0$

$(w_1, \dots, w_n)$ est une base $\Rightarrow \det(\overbrace{w_1, \dots, w_n}^{{}^t B}) \neq 0$

Ainsi $(v_1, \dots, v_n)$ libre $\Leftrightarrow \det(A \cdot B) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(A) \cdot \det B \neq 0$

puisque $\det(B) = \det B \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow \det([v_1]_B \dots [v_n]_B) \neq 0$. □.

Déterminant et volume

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille des vecteurs on considère le parallélépipède

$$P = \{ c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \mid c_i \in [0,1] \ \forall i = 1 \dots n \}$$

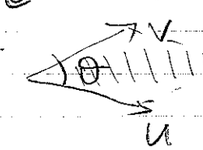
↑ tous les combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$ avec les coeff dans $[0,1]$.

THM 3.12 : 1) Si u, v deux vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ l'aire du parallélogramme définie par u et v vaut $|\det(u,v)|$.

(2) Soit (u,v,w) trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, le volume de parallélépipède défini par u,v,w vaut $|\det(u,v,w)|$.

dém : (1) Soit $u = (a,c)$, $v = (b,d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

on démontre le (1)



$0 \leq \theta < \pi$

$$A(P) = \|u\| \|v\| \sin\theta$$
$$A(P) = \|u\| \|v\| \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$$
$$= \sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - u \cdot v}$$
$$= \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2}$$
$$= \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|. \ \square$$