

Corollaire 3.4: (1) Si on échange deux colonnes (lignes) d'une matrice carrée son déterminant se multiplie par -1

(2) Si deux colonnes (lignes) distinctes d'une matrice carrée A sont égales, alors $\det A = 0$

dém.: (1) Soit $z(i, j) \Rightarrow \varepsilon(z) = -1$

Par prop 3.3 $\det$ se multiplie par le sign $\varepsilon(z) = -1$.

(2) Si $C_i = C_j$ où $i \neq j$

quand on échange les colonnes C_i et C_j la matrice reste la même ainsi

$$\det A = \varepsilon(z) \det A \quad \text{où } z = (i, j) \\ \varepsilon(z) = -1$$

$$\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$$

□

THM 35: Soit $C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n$ $n-1$ vecteurs de colonnes

l'application $K^n \rightarrow K$

$$C \mapsto \det[C_1, \dots, C_{j-1}, C, C_{j+1}, \dots, C_n]$$

linéaire.

$$\begin{aligned} \forall C, C' \in K^n \\ \forall \lambda \in K \quad \det[C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, C + \lambda C', C_{j+1}, \dots, C_n] = \\ \det[C_1, \dots, C_{j-1}, C, C_{j+1}, \dots, C_n] + \lambda \det[C_1, \dots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \dots, C_n] \end{aligned}$$

$$\text{dém! } \det [C_1 \dots, C_i + \lambda C'_i, \dots, C_n] = \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

$$A'' = [a''_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$= \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} \varepsilon(\sigma) (a_{\sigma(i), i} + \lambda a'_{\sigma(i), i}) \prod_{i \neq j} a_{\sigma(i), i}$$

$$= \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(i), i} \prod_{i \neq j} a_{\sigma(i), i} + \lambda \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(i), i} \prod_{i \neq j} a_{\sigma(i), i}$$

$$= \det [C_1 \dots C \dots C_n] + \lambda \det [C_1 \dots C' \dots C_n]$$

□

Remarque: tous qui est démontré pour les colonnes sont valable aussi pour les lignes car on a vu que

$$\det A = \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} = \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

Thm 3.5: Soit $C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n$ $n-1$ vecteurs de colonnes

l'application $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$$

$C_i \mapsto \det[C_1 \dots C_{j-1} C C_{j+1} \dots C_n]$
est linéaire.

Cad $\forall C, C' \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\det[C_1 \dots C + \lambda C' \dots C_n] = \det[C_1 \dots C \dots C_n] + \lambda \det[C_1 \dots C' \dots C_n]$$

dem: $\det \underbrace{[C_1 \dots C_{j-1} C + \lambda C' C_{j+1} \dots C_n]}_{\alpha_{r,s}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k}$

$$\alpha_{r,s} = a_{r,s} \quad \forall r \in \{1, \dots, n\} \quad s \neq j$$

$$\alpha_{r,j} = a_{r,j} + \lambda a'_{r,j}$$

$$\Downarrow$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (a_{\sigma(j),j} + \lambda a'_{\sigma(j),j}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{\sigma(k),k}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{\sigma(k),k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \lambda a'_{\sigma(j),j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{\sigma(k),k}$$

$$= \det[C_1 \dots C \dots C_n] + \lambda \det[C_1 \dots C' \dots C_n]$$

□

Remarque: le même est vrai pour les lignes en utilisant $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$

Corollaire 3.6: 1) Si A une matrice with q colonne (ligne) nul. $\det A = 0$

2) Si $A = [C_1, \dots, C_n]$ et $B = [C_1, \dots, \lambda C_j, \dots, C_n]$, Alors
 $\det B = \lambda \det A$

3) $\forall i, j \neq 0, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\det [C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n] = \det [C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_j, \dots, C_n]$$

démo: (Remarque par itération. le même vrai pour $C_i + \lambda \sum_{j=1}^n C_j$)

1) Applique Thm 3.5 avec

$$C = C' = 0, \lambda = 1$$

$$\det [C_1, \dots, 0 + 0, \dots, C_n] \stackrel{\text{THM}}{=} \det [C_1, \dots, 0, \dots, C_n] + \det [C_1, \dots, 0, C_n]$$
$$[C_1, \dots, 0, \dots, C_n]$$

$$\det [C_1, \dots, 0, C_n] = 2 \det [C_1, \dots, 0, C_n] \Rightarrow \det [\] = 0$$

2) Applique Thm 3.5 avec

$$C = 0, C' = C_j, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\det [C_1, \dots, 0 + \lambda C_j, \dots, C_n] \stackrel{\text{THM}}{=} \det [C_1, \dots, 0, \dots, C_j] + \lambda \det [C_1, \dots, C_j, \dots, C_n]$$

$$\det B = 0 + \lambda \det A$$

↑
par
part (1)

3) Applique Thm 3.5 $C = C_j, C' = C_i, \lambda \in \mathbb{K}$

Juste pour écriture supposons $i < j$

$$\det [C_1, \dots, \underbrace{C_i + \lambda C_j}_{\text{même colonne}}, \dots, C_n] \stackrel{\text{THM}}{=} \det [C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n] + \lambda \det [C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n]$$

la dernière est zéro par corollaire 3.4
car elle a deux colonnes égales.

□

THM 3.7: (Développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne)

Soit $n \geq 1$ et soit $A \in M_n(K)$ et $A_{i,j}$ la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenu de A en effaçant i ème ligne et j ème colonne.

1) Soit $1 \leq i \leq n$. On a alors

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

On dit qu'on a développé $\det A$ selon i ème ligne.

2) Soit $1 \leq j \leq n$. On a alors

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

on dit qu'on a développé $\det A$ selon j ème colonne.

lemme 3.7.1: $\exists$ une bijection ϕ ,

$$\phi: \{\sigma \in \tilde{S}_n : \sigma(i) = j\} \rightarrow \tilde{S}_{n-1}$$

$$\sigma \mapsto \phi(\sigma) \text{ tq } \phi(\sigma) : \{1, \dots, n-1\} \xrightarrow{1 \dots 1} \{1, \dots, n-1\}$$

dém!

Soit $\sigma \in S_n$ tq $\sigma(i) = j$

$$\sigma|_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} : \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \longrightarrow \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$$

considérons

réordonné

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & i-1 & \curvearrowright & i & \dots & n-1 \end{array}$$

considère

$$p_i : \{1, 2, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$$

$$\begin{aligned} k &\longmapsto k & \text{si } k < i \\ k &\longmapsto k+1 & \text{si } k \geq i \end{aligned}$$

similairement

$$q_j = \{1, 2, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$$

$$\begin{aligned} r &\longmapsto r & \text{si } r < j \\ r &\longmapsto r+1 & \text{si } r \geq j+1 \end{aligned}$$

$$\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} \xrightarrow{\sigma|_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}}} \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow q_i & & \uparrow q_j \\ \{1, 2, \dots, n-1\} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \{1, 2, \dots, n-1\} \end{array}$$

$$\boxed{\hat{\sigma} = q_j^{-1} \circ \sigma|_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \circ q_i \in S_{n-1}}$$

ainsi
 $\phi(\sigma) = \hat{\sigma}$

Soit $\phi = \{\sigma \in \widetilde{S}_n : \sigma(i) = \bar{j}\} \rightarrow \widetilde{S}_{n-1}$

$$\sigma \longmapsto \hat{\sigma} = q_{\bar{j}}^{-1} \circ \sigma \circ q_i$$

$$\hat{\sigma} = \phi(\sigma) : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$$

$$k \longmapsto q_{\bar{j}}^{-1} \circ \sigma \circ q_i(k) = \begin{cases} q_{\bar{j}}^{-1}(\sigma(k)) & k < i \\ q_{\bar{j}}^{-1}(\sigma(k+1)) & k \geq i \end{cases}$$

ϕ est une bijection, son inverse

$$\gamma : \widetilde{S}_{n-1} \rightarrow \{\sigma \in \widetilde{S}_n : \sigma(i) = \bar{j}\}$$

$$\gamma \longmapsto q_{\bar{j}} \circ \gamma \circ q_i^{-1}$$

$$\begin{aligned} \phi \circ \gamma(\gamma) &= \phi(q_{\bar{j}} \circ \gamma \circ q_i^{-1}) = q_{\bar{j}}^{-1} \circ (q_i \circ \gamma \circ q_i^{-1}) \circ q_i \\ &= \gamma = \text{id}_{\widetilde{S}_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \circ \phi(\sigma) &= \gamma(q_{\bar{j}}^{-1} \circ \sigma \circ q_i) = q_{\bar{j}} \circ (q_{\bar{j}}^{-1} \circ \sigma \circ q_i) \circ q_i^{-1} \\ &= \sigma = \text{id}_{\{\sigma \in \widetilde{S}_n : \sigma(i) = \bar{j}\}} \end{aligned}$$

□

lemme 3.7.2: $\forall \sigma \in \{\sigma \in \widetilde{S}_n : \sigma(i) = \bar{j}\}$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\bar{j}+i} \cdot \varepsilon(\phi(\sigma))$$

dém:

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} & \xrightarrow{\sigma} & \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\bar{j}\} \\ \uparrow q_i & & \uparrow q_{\bar{j}} \\ \{1, 2, \dots, n-1\} & \xrightarrow{\phi(\sigma)} & \{1, 2, \dots, n-1\} \end{array}$$

On va compter les inversions pour σ et $\phi(\sigma)$. Notons que q_i, q_j preserve l'ordre donc tous les inversions de σ qui ne contiennent pas i sont les inversions de $\phi(\sigma)$.

$$I_\sigma = I_{\phi(\sigma)} \cup \{ (k, i) : k < i, \sigma(k) > \sigma(i) = j \} \\ \cup \{ (i, l) : l > i, \sigma(l) < \sigma(i) = j \}$$

$$\text{Soit } A = \text{card} \{ k < i : \sigma(k) > j \}$$

$$B = \text{card} \{ l > i : \sigma(l) < j \}$$

$$C = \text{card} \{ k < i : \sigma(k) < j \}$$

$$\text{card} \{ k < i : \sigma(k) > j \text{ ou } \sigma(k) < j \} = i - 1$$

$$\text{Donc, } A + C = i - 1$$

$$\text{card} \{ k \neq i : \sigma(k) < j \} = j - 1 \text{ et donc}$$

$$B + C = j - 1$$

$$\text{ainsi } A + B + 2C = i - 1 + j - 1$$

$$\Rightarrow A + B = i + j - 2 - 2C \equiv i + j \pmod{2}$$

Donc,

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{card}(I_\sigma)} = (-1)^{\text{card}(I_{\phi(\sigma)}) + A + B} \\ = (-1)^{i+j} \varepsilon(\phi(\sigma)).$$

□.

dém. de Thm 37: On va démontrer que
 (1) (la (2) est similaire)

On considère $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{i, \sigma(i)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k, \sigma(k)}$$

Notons que $\tilde{\mathcal{S}}_n = \bigsqcup_{j=1}^n \{ \sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = j \}$

Ainsi, $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{i, j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k, \sigma(k)}$

$$= \sum_{j=1}^n a_{i, j} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(i) = j}} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k, \sigma(k)}$$

Par lemma 3.7.1 il existe une

bijection $\phi: \{ \sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = j \} \xrightarrow{1-1} \tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$
 $\sigma \longmapsto \hat{\sigma} := \phi(\sigma)$

Et par lemma 3.7.2 $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i+j} \varepsilon(\hat{\sigma})$

on a

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{i, j} \sum_{\hat{\sigma} \in \tilde{\mathcal{S}}_{n-1}} (-1)^{i+j} \varepsilon(\hat{\sigma}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k, \sigma(k)}$$

$\prod_{s=1}^{n-1} a_{s, \hat{\sigma}(s)}$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \underbrace{\sum_{\sigma \in \overline{\sigma}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{s=1}^{n-1} a_{s, \sigma(s)}}_{\det A_{i,j}}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

□.

THM 38: Seien $n \geq 1$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\det(AB) = \det A \det B$$

dem: Seien $A = (a_{i,j})$ $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \overline{\sigma}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (AB)_{i, \sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \overline{\sigma}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k, \sigma(i)} \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in \overline{\sigma}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\sum_{k_1=1}^n a_{1,k_1} b_{k_1, \sigma(1)} \right) \cdots \left(\sum_{k_n=1}^n a_{n,k_n} b_{k_n, \sigma(n)} \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in \overline{\sigma}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ \in \{1, \dots, n\}^n}} \prod_{i=1}^n a_{i,k_i} b_{k_i, \sigma(i)}$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, k_i} b_{k_i, \sigma(i)}$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, k_i} \prod_{i=1}^n b_{k_i, \sigma(i)}$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i, k_i} \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{k_i, \sigma(i)}}_{\det B(k_1, \dots, k_n)} \right)$$

$\det \begin{bmatrix} \text{ligne } k_1 \text{ de } B \\ \vdots \\ \text{ligne } k_n \text{ de } B \end{bmatrix}$

Ainsi $\det(AB) = \sum_{k_1, \dots, k_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i, k_i} \right) \det B(k_1, \dots, k_n)$

Si deux k_i sont égaux alors $\det B(k_1, \dots, k_n) = 0$
 par corollaire 34

Ainsi seuls restent les n -uplets $(k_1, \dots, k_n)$ où

tous les k_i sont distincts. Dans ce cas on peut voir
 $\underbrace{k_1, \dots, k_n}_{\text{comme}}$ une permutation de $1, \dots, n$. Ainsi $\exists \tau \in \mathcal{O}_n$ tq.

$$k_i = \tau(i)$$

$$\det(AB) = \sum_{\tau \in \mathcal{O}_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \tau(i)} \det \begin{bmatrix} B_{\tau(1)} \\ \vdots \\ B_{\tau(n)} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathcal{O}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n a_{i, \tau(i)} \det B = \det A \det B$$

□

Corollaire 3.9: Soit $A \in M_n(K)$.

$$\left[\begin{array}{l} A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \\ \text{De plus, } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1} \end{array} \right.$$

dém: $(\Rightarrow)$ Si A est inversible alors

$$\exists A^{-1} \text{ tq } AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

$$\text{THM 3.8} \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1})$$

$$\text{Donc, on a } \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

Donc $\det A \neq 0$ (car sinon le résultat du produit peut être que zéro).

$$\text{Et de plus } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det(A))^{-1}$$

$(\Leftarrow)$ Réciproquement supposons que A n'est pas inversible. Alors $\ker(A) \neq \{0_{K^n}\}$.

En particulière. $\exists X \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ tq.

$$AX = 0_{K^n}. \text{ Soit } A = [C_1 \dots C_n] \text{ où}$$

C_i les colonnes de A pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$$AX \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i C_i = 0_{K^n} \quad \text{c.ad. les colonnes}$$

de A sont liés. Par Corollaire 3.6, $\det A = 0$.

□