

Déterminants

défn: Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i, j \leq n}} \in M_n(K)$.

On appelle déterminant de la matrice A

la quantité $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}$

exemple: $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\mathcal{O}_2 = \{ \text{id}, (12) \}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} \\ + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{array}$$

$$\mathcal{O}_3 = \{ \text{id}, (12), (23), (13), (123), (132) \}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $+ \quad - \quad - \quad - \quad + \quad +$

Notation: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

Remarques:

- 1) Si $\sigma \in \mathcal{O}_n$ alors $\sigma^{-1} \in \mathcal{O}_n$ aussi de plus $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ et $\forall \sigma \text{ tq } i = \sigma(j)$ et $\sigma^{-1}(i) = j$.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma^{-1}(i)}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma^{-1}(i)}$$

$$\sigma \in S_n \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in S_n \rightarrow \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma^{-1}(i)}$$

$$\text{soit } z = \sigma^{-1} \\ = \sum_{z \in S_n} \varepsilon(z) \prod_{i=1}^n a_{i, z(i)}$$

$$\text{Ainsi } \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

2) $\det({}^t A) = \det A$ soit ${}^t A = [\alpha_{ij}]$ par defn

$$\alpha_{ij} = a_{j,i} \text{ Ainsi } \alpha_{\sigma(j), j} = a_{j, \sigma(j)}$$

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n \alpha_{\sigma(j), j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma(j)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} = \det(A)$$

Prop 3.1: $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire
supérieur (ou inférieur). Alors

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

↑
produit des éléments
sur la diagonale.

dém. On va montrer pour les matrices triangulaire
supérieur (tri. inférieur) est similaire

Soit $\sigma \in S_n$.

si $\sigma \neq \text{id}$ alors $\exists 1 \leq j \leq n$ tq $\sigma(j) > j$

comme A est triang. supérieur $a_{i,j} = 0 \forall i > j$

ainsi $a_{\sigma(j),j} = 0$ on en déduit $\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} = 0$

dès que $\sigma \neq \text{id}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} = \varepsilon(\text{id}) \prod_{j=1}^n a_{j,j} + 0 + \dots + 0 \\ &= \prod_{j=1}^n a_{j,j} \end{aligned}$$

□.

Proposition 3.2 Si $A_1 \in M_r(\mathbb{K})$, $A_2 \in M_{n-r}(\mathbb{K})$
et $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$, Alors

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) = \det A_1 \det A_2$$

ADMISS □

Proposition 3.3: Soit $A \in M_n(K)$ une matrice
de colonnes $C_1, \dots, C_n$. Si $\sigma \in S_n$, on a

$$\det [C_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(n)}] = \varepsilon(\sigma) \det [C_1 \dots C_n]$$

$$= \varepsilon(\sigma) \det A.$$

dem: Soit $B = [C_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(n)}] = \begin{bmatrix} a_{1,\sigma(1)} & \dots & a_{1,\sigma(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,\sigma(1)} & \dots & a_{n,\sigma(n)} \end{bmatrix}$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}$$

comme $\sigma = \sigma \circ \tau^{-1} \circ \tau$ et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \cdot \varepsilon(\tau)$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^n a_{\sigma \circ \tau^{-1}(j), j}$$

$$= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{\sigma \circ \tau^{-1}(j), j}$$

soit $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \tau^{-1}$ de plus quand $j \in \{1, \dots, n\}$
 $\tau(j) \in \{1, \dots, n\}$ ainsi

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{\sigma \circ \tau^{-1}(j), j} = \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \varepsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^n a_{\tilde{\sigma}(i), i} = \det A$$

Donc, $\det B = \varepsilon(\tau) \det A$

□

Corollaire 3.4: (1) Si on échange deux colonnes (lignes) d'une matrice carrée son déterminant se multiplie par -1

(2) Si deux colonnes (lignes) distinctes d'une matrice carrée A sont égales, alors $\det A = 0$

dém.: (1) Soit $z(i, j) \Rightarrow \varepsilon(z) = -1$

Par prop 3.3 $\det$ se multiplie par le sign $\varepsilon(z) = -1$.

(2) Si $C_i = C_j$ où $i \neq j$

quand on échange les colonnes C_i et C_j la matrice reste la même ainsi

$$\det A = \varepsilon(z) \det A \quad \text{où } z = (i, j) \\ \varepsilon(z) = -1$$

$$\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$$

□

THM 35: Soit $C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n$ $n-1$ vecteurs de colonnes

l'application $K^n \rightarrow K$

$$C \mapsto \det[C_1, \dots, C_{j-1}, C, C_{j+1}, \dots, C_n]$$

linéaire.

$$\begin{aligned} \text{o-ad. } \left. \begin{array}{l} \forall C, C' \in K^n \\ \lambda \in K \end{array} \right\} & \det[C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, \lambda C, C_{j+1}, \dots, C_n] = \\ & \lambda \det[C_1, \dots, C_{j-1}, C, C_{j+1}, \dots, C_n] + \lambda \det[C_1, \dots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \dots, C_n] \end{aligned}$$