Définition de Polynôme caractéristique:

Rappelons que λ est une valeurs propre de A

$\Leftrightarrow \exists V \neq 0$ tq. $AV = \lambda V$

$\Leftrightarrow AV - \lambda V = 0_{n\times n}$ ou bien $0_{n\times n} = \lambda V - AV$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)V = 0_{n\times n}$ ou bien $0_{n\times n} = (\lambda I - A)V$

où $V \neq 0_E$ c-ad $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(\lambda I - A) \neq \{0_E\}$

ce qui implique que la matrice

$A - \lambda I_n = -(\lambda I_n - A)$ n'est pas inversible

ainsi $0 = \det(A - \lambda I_n) = \det(-(\lambda I_n - A)) = (-1)^n \det(\lambda I_n - A)$,

$\det(cA) = c^n \det A$

On a montré que ces déterminants nous donne un polynôme dont les racines sont des valeurs propres de A.

$\det(\lambda I_n - A)$ un polynôme Unitaire

c-a-d $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \dots + a_0$

coef. 1

et $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \dots + a_0$

On va appeler $\det(\lambda I_n - A)$ polynôme caractenstique de A. Donc, poly. caractenstique est un polynôme unitaire.

Votre exercice:

Mq Pour chaque $\lambda \in K$ valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, E e.v. de dim n.

$$m_{géo}(\lambda) \leq m_{alg}(\lambda)$$ où

où

$m_{géo}(\lambda) = \dim \ker(f-\lambda id)$ appelé multiplicité géom. et

$m_{alg}(\lambda)$ multiplicité algébrique si $(X-\lambda)^{m_{alg}(\lambda)} | \chi_f$ et $(X-\lambda)^{m_{alg}(\lambda)+1} \nmid \chi_f$ (maximum puissance de $(X-\lambda)$ qui divise polynôme caractéristique.

dém: Soit $m_{géo}(\lambda) = r = \dim \ker(F-\lambda id)$

On choisi une base $(V_1, \dots, V_r)$ pour $\ker(F-\lambda id)$.

Completer cette base à une base

$\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_n)$ pour E. Alors,

$f(V_i) = \lambda V_i \quad \forall i = 1, \dots, r$

$f(V_j) = c_1^j V_1 + \dots + c_n^j V_n \quad \forall j = r+1, \dots, n$

Ainsi

$$M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & c_1^{r+1} & c_1^n \\ 0 & \lambda & & \vdots & \vdots \\ & 0 & \lambda & & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & c_{r+1}^{r+1} & c_{r+1}^n \\ 0 & \cdots & 0 & c_n^{r+1} & c_n^r \end{bmatrix} \quad (r \text{ colonnes})$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda Id_{r \times r} & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \quad n-r \times n-r$$

$$\chi_f = \chi_M = \det(M - X I_n) \qquad \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \text{ matrice en bloc}$$

$$= \det(\lambda I_n - X I_n)\det(B - X I_n)$$

$$= (\lambda - X)^r \chi_B$$

Ainsi $(\lambda - X)^r \mid \chi_f$. Puisque $m_{alg}(\lambda)$ est la puissance maximale du facteur,

$$m_{geo}(\lambda) = r \leqslant m_{alg}(\lambda).$$

□.

Rappel:

Supposons $f \in \mathcal{L}(E)$, (E ev de dim finie) diagonalisable. Donc on a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(f)$$

soit $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

On a $\forall X \in E_\lambda(f)$, $f(X) = \lambda X \in Vect(X) \subset E_\lambda(f)$

Donc, la restriction f sur $E_\lambda(f)$, donne

$$f|_{E_\lambda(f)} : E_\lambda(f) \longrightarrow E_\lambda(f)$$
$$X \longmapsto \lambda X$$

un endomorphisme de $E_\lambda(f)$

" On divise E en morceaux sur lesquels f est endomorphisme. La propriété clé et $\forall X \in E_\lambda(X)$, $f(X) \in E_\lambda(X)$.

défn: $F \subset E$ sous-espace vectoriel.

F est dit STABLE par f si $f(F) \subset F$

c.a.d $\forall v \in F$, $f(v) \in F$. Dans ce cas on a:

$f_F : F \to F$, $x \mapsto f(x)$ un endomorphisme de F appelé, la restriction de f à F.

Exemples: (1) $F = \{0\}$ stable par $\forall f \in \mathcal{L}(E)$. ($f$ l'application linéaire)

(2) $\ker(f)$ stable par f: $\forall v \in \ker(f)$, $f(v) = 0_E \in \ker f$.

(3) $\mathrm{Im}(f)$ stable par f: Soit $w \in \mathrm{Im}(f)$, alors $\exists v \in E$ tq. $f(v) = w$. OR $f(w) = f(f(v))$ donc $f(w) \in \mathrm{Im}(f)$.

(4) Soit $\mathrm{Vect}(v)$ stable par f si et seulement si v est un vecteur propre de f. (démonstration exercice pour vous)

(5) $\forall \lambda \in Sp(f)$, $E_\lambda(f)$ stable par f.

Les sous-esp. stables sont une généralisation des sous-espaces propres!

Proposition 1: Si $F \subset E$ s.e. stable de dim r

Alors $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de E dont la matrice de l'endomorphisme $f: E \to E$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ représente (matrice triangulaire par blc) $f|_F$.

En particulière si $E = F \oplus G$ avec F, G

stables par f. on a,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$ ← matrice diagonale par bloc

De plus, dans les deux cas on a

$$\chi_f(X) = \chi_A(X)\,\chi_C(X)$$

c.ad. poly carac de la restriction $f|_F$ divise poly. carac de f.

dém: Soit $\beta = (v_1, \dots, v_r)$ une base pour F

puisque F stable par f, $\forall v_j \in \beta, j = 1 \to r$

$f(v_j) \in F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r)$. Donc, $\exists c_{i,j} \in \mathbb{K}$ tq.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{r} c_i^j v_i$$

En complétant cette base en une base pour E, on obtient une base $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ pour E et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} c_{ij} & * \; * \\ \hline 0 & * \; * \end{array}\right]$$

Maintenant :

$\forall$ polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$

On peut définir $P(f) : E \to E$ l'endomorphisme définie par $a_0 id + a_1 f + \dots + a_m f^m$.

Proposition 2 : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ les sous espaces $\ker(P(f))$, $\mathrm{Im}(P(f))$ sont stables par f.

dém : Notons que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, f et $P(f)$ commutent car $\boxed{f \circ f^k = f^{k+1} = f^k \circ f}$ $\forall k \geq 0$ (*) - Donc,

$$f \circ P(f) = f \circ (a_0 id + a_1 f + \dots + a_m f^m) = a_0 f \circ id + a_1 f \circ f + \dots + a_m f \circ f^m$$
$$= a_0 (id \circ f) + \dots + a_m (f^m \circ f)$$
$$\overset{(*)}{=} (a_0 id + \dots + a_m f^m) \circ f.$$

Soit $\phi := P(f)$. On veut montrer que $\ker(\phi)$ est stable par f c.ad $\forall x \in \ker\phi$, $f(x) \in \ker\phi$

or, $x \in \ker\phi \iff \phi(x) = 0_E \iff P(f)(x) = 0_E$

appliquer f : $f(P(f)(x)) = f(0_E) = 0_E$ (f app lin)

or f, $P(f)$ commute donc

$$P(f)(f(x)) = 0_E \iff f(x) \in \ker(P(f)) = \ker(\phi)$$

Donc, $\ker(P(f))$ est stable par f.

Soit $Y \in Im(\phi) = Im(P(f))$. On veut montrer $f(Y) \in Im(P(f))$

$Y \in Im(P(f)) \Leftrightarrow \exists X \in E,\ P(f)(X) = Y$

appliqué f $\quad f(P(f)(X)) = f(Y)$

$f, P(f)$ commute $\quad P(f)(f(X)) = f(Y)$

W

$W \in E$ et $P(f)(W) = f(Y) \Leftrightarrow f(Y) \in Im(P(f))$

Donc, $Im(P(f))$ est stable par f.

□

Polynômes annulateurs :

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit ANNULATEUR de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (l'endomorphisme nul)

Remarque : Si P est annulateur de f alors pour tout polynôme $P.Q$ est annulateur de f.

$$(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

le même vrai pour $Q.P$ aussi.

Remarque : On défini le même façon polynôme annulateurs pour les matrices !

exemples: 1) Si $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

donc, $A^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=2A$

$\Rightarrow A^2-2A=0$

Donc, X^2-2X est un polynôme annulateur de la matrice A.

2) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})$, alors $X^2-(a+d)X+ad-bc$ est un polynôme annulateur de A. (exercice vérifie que $A^2-(a+d)A+ad-bc=0_{2\times 2}$)

Prop 3: E $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dim finie
Alors, tout $f: E\to E$ endomorphisme possède un polynôme annulateur non-nul.

dém: Soit $n=\dim E$, alors $\dim(\mathcal{L}(E))=n^2$
Donc, la famille de $n+1$ - vecteurs
$(id, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée. Il existent donc des scalaires $a_0, a_1, \dots a_{n^2}\in\mathbb{K}$ non tous-nuls tels que $a_0 id_E + a_1 f + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}$
Donc, le polynôme $a_0+a_1X+\dots+a_{n^2}X^{n^2}$ est un polynôme annulateur non-nul (car il existe au moins un a_i qui est non-nul) □.

COR 4 (version matriciel de Prop 3)

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exists$ un polynôme P non-nul t.q. $P(A) = 0_{n\times n}$

□

THM 5 : E : un $\mathbb{K}$ e.v., $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f, non-nul et de degré minimal parmi les polynôme annulateurs non-nuls de f. ALORS,

$Q \in \mathbb{K}[X]$ annule $f \iff P$ divise Q dans $\mathbb{K}[X]$

dém : ($\Leftarrow$) Si P divise Q alors $\exists$ un polynôme $Q' \in \mathbb{K}[X]$ tq. $Q = P \cdot Q'$

Donc, Q est un multiple d'un polynôme annulateur par le remarque précedent Q est annulateur c.a.d.

$$Q(f) = (P \cdot Q')(f) = P(f) \circ Q'(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ Q'(f)$$
$$= 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

($\Rightarrow$) Supposons que Q annule f c.a.d.

$$Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On divise Q par P, division euclidienne pour les polynôme assure qu'il existe $\tilde{Q}$ et R polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ tels que

$Q = P.\tilde{Q} + R$ où $\deg R < \deg P$.

Comme $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ on a

$0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} + R(f) \Rightarrow R(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ c.ad.

$R(f)$ est un polynôme annulateur pour f

OR $\deg R < \deg P$ contradit du fait que P à degré minimal parmi les poly. annula. non-nuls de f. Donc, $R = 0_{\mathbb{K}[X]}$, ce qui implique que $Q = P.\tilde{Q}$ c.a.d. P divise Q □.

Corollaire 6': Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension fini. ALORS, il existe UNIQUE polynôme unitaire annulant f de degré minimal parmi les polynôme annulateurs non-nuls de f.

dém: Supposons que P_1 et P_2 sont deux tels polynôme. Par minimalité de degré on a $\deg P_1 = \deg P_2$.

PAR THM6, P_1 divise $P_2 \Leftrightarrow P_2 = P_1.Q$.

avec $\deg Q = 0$ car $\deg P_2 = \deg P_1$.

Donc, Q un polynôme constant de valeur λ.

Comme P_1, P_2 sont unitaire, $\lambda_1 = 1$ et $P_1 = P_2$ □

définition : [polynôme minimal]

- Pour les endomorphisme :
  - $\forall f : E \to E$ endomo. On appelle le polynôme minimale de f l'unique polynôme unitaire annulant f et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non-nuls de f. On le note $\mu_f(X)$.

- Pour les matrices :
  $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appele le polynôme minimal de A l'unique polynôme unitaire annulant A et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non-nuls de A. On le note $\mu_A(X)$.

PAR THM 6 $\forall Q$ polynome annulateur de f, $\mu_f | Q$
A, $\mu_A | Q$

exemples 1) $f=\lambda id_E$, puisque f non-nul, f n'est pas annulé par un polynôme de degré 0.

Par contre le polynôme unitaire $X-\lambda$ de degre 1 annule f on a donc $\mu_f(X)=X-\lambda$

2) Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Comme A n'est pas une matrice d'homotethie, $\deg(\mu_A)\geq 2$. Par ailleurs,

$A^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3A$. Ainsi $A^2=3A \Rightarrow A^2-3A=\underline{0}$

Donc, A est annulé par le polynôme X^2-3X. et $\mu_A(X)=X^2-3X=X(X-3)$

THM 7 (thm de cayley-Hamilton)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim fini n et soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On note $\chi_f(X)=\det(XId_E-f)$

Alors, $\chi_f(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

dém: Considerons la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ où $n=\dim E$. La famille contenant $n+1$ vecteur est liée.

Soit r le plus petit entier strictement positif tq. $(x, f(x), \dots, f^r(x))$ soit liée.