Reduction des endomorphismes:

Soit E un espace vectoriel et $f: E \to E$ un endomorphism notre but est de chercher une base B t.q. f dans cette base est représenté par une matrice simple.

Une matrice simple: si $Mat_B(f) = I_n$,

Puisque $Mat_{B'}(f) = P^{-1} Mat_B P$ pour une matrice inversible P, $Mat_{B'}(f) = I_n$ $\forall B'$ base ainsi $f = id$. Donc, forcer $Mat_B(f) = I_n$ trop restrictive. On va demander si on peut trouver une base dans laquelle f est representée par une matrice Diagonale.

Defn: [Diagonalisabilité]

- Soit $f: E \to E$ endomorphisme, on dit que f est diagonalisable $\iff$ $\exists$ une base B de E t.q. $Mat_B(f)$ est diagonale.
- Une matrice A est diagonalisable ssi

$$f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X \longrightarrow AX$$ est diagonalisable.

Condition nécessaire!

s'il existe $B=(v_1,\dots,v_n)$ base t.q.

$$Mat_B(f)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$ alors on a

$\forall i=1..n$ $f(v_i)=\lambda v_i$, puisque B est une base aucun v_i n'est nul.

déf: [Valeur propre, vecteur propre, spectre, espace propre]

Soit $f\in L(E)$, un endomorphisme de E.

- $\lambda\in K$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non-nul tq $f(v)=\lambda v$.
- un tel vecteur non-nul s'appelle un vecteur propre de f.
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f, noté $Sp(f)$.
- l'ensemble, $E_\lambda(f)$ des vecteurs propres de f, associé à la valeur propre λ est un sous espace vectoriel, car $E_\lambda(f)=\ker(f-\lambda id)$ et est appelé espace propre associé à λ.

déf: (Version matricielle)

Soit $A\in M_n(K)$,

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $X \neq 0$ tq. $AX = \lambda X$
- Un tel vecteur non-nul s'appelle vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- L'ensemble des valeurs propres s'appelle le spectre de A, noté $Sp(A)$.
- L'ensemble des vecteurs propres de A associé à la valeurs propres $E_\lambda(A)$ associé à la valeurs propre λ est un sous espace vectoriel car $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)$ et nommé sous espace propre associé à λ.

Déf: [Base Propre]

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E une base de E s'appelle <u>une base propre de f</u> si elle est formé des vecteurs propres de f.

<u>Proposition 41</u>: f est diagonalisable si et seulement si $\exists$ une base propre de f pour E.

dém: ($\Rightarrow$) f est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists$ une base B tq. $Mat_B(f) = Diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ c.a.d $v_i \neq 0$ et $\forall v_i \in B$ $f(v_i) = \lambda_i v_i \Rightarrow v_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

($\Leftarrow$) Soit $B = (v_1, \dots v_n)$ une base propre donc $\forall i = 1, \dots n$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ tq. $f(v_i) = \lambda_i v_i$ t.q. $Mat_B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, ainsi f est diagonalisable

□

Rappelons que deux matrices qui ont associé à un endomorphisme f sont semblable (A et B semblable $\Leftrightarrow \exists P$ inversible tq. $B = P^{-1}AP$)

Soit B, B' deux bases pour E alors

$$Mat_{B'}(f) = P_{B \leftarrow B'}^{-1} \; Mat_B(f) \; P_{B \leftarrow B'}$$

où $P_{B \leftarrow B'} = [[v_1']_B \dots [v_n']_B]$, c.a.d.

$Mat_{B'}(f)$ et $Mat_B(f)$ sont semblable.

Proposition 4.2: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible alors

(1) $Sp(A) = Sp(P^{-1}AP)$

(2) $E_\lambda(A) = P \cdot E_\lambda(P^{-1}AP)$. En particulier $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(P^{-1}AP)$.

dém: ($\supseteq$) Soit $\lambda \in Sp(P^{-1}AP) \Rightarrow \exists X \neq 0$ t.q.

$(P^{-1}AP)X = \lambda X \Rightarrow P(P^{-1}AP)X = P(\lambda X)$

(multip. par P de gauche)

$\Rightarrow (P.P^{-1})(AP)X = \lambda PX$ (asso.)

$\Rightarrow A(PX) = \lambda(PX)$ (asso. const.)

OR P inversible $\Rightarrow$ [si $X \neq 0$, alors $PX \neq 0$]

Ainsi λ est une valeur propre de A avec le vecteur propre PX.

($\subseteq$) Soit $\mu \in Sp(A) \Leftrightarrow \exists Y \neq 0$ tq. $AY = \mu Y$

$\Rightarrow P^{-1}AY = P^{-1}\mu Y = \mu P^{-1}Y$ (multip par P^{-1})

$\Rightarrow P^{-1}A I_n Y = \mu P^{-1}Y$

$\Rightarrow P^{-1}A P P^{-1} Y = \mu P^{-1}Y$

$\Rightarrow (P^{-1}AP) P^{-1}Y = \mu (P^{-1}Y)$

OR P inversible $\Rightarrow$ [$P^{-1}Y \neq 0$ si $Y \neq 0$]

Donc, μ est une valeur propre de A et $P^{-1}Y$ est un vecteur propre associé à μ.

Ainsi $\mu \in Sp(A)$.

(2) On voit dans la démonstration de $P^{-1}AP$ alors PX est un vecteur propre de A

On considère $\phi : E_\lambda(P^{-1}AP) \to E_\lambda(A)$

$X \longrightarrow PX$

ϕ admet une inverse $\psi : E_\lambda(A) \to E_\lambda(P^{-1}AP)$

$Y \longmapsto P^{-1}Y$

Donc, ϕ est un isomorphism en particulière surjective c.ad. $\phi(E_\lambda(P^{-1}AP)) = E_\lambda(A)$

$\| $

$P.E_\lambda(P^{-1}AP)$

En particulière, $\dim E_\lambda(A) = \dim_{E_\lambda}(P^{-1}AP)$.

Remarque: Si X est un vecteur propre de A, associé à λ, $\forall c \in \mathbb{K}^*$, cX est un vecteur propre de A associé à λ.

$A(cX) = cAX \overset{X \text{ vecteur propre}}{=} c(\lambda X) = \lambda cX$. Donc, $A(cX) = \lambda(cX)$ [$X \neq 0 \Rightarrow cX \neq 0$] Donc, cX est un vec-prop. associé à λ.

Comment trouver les valeurs propres ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow \exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X$.

Notons que $AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$

$\Leftrightarrow X \in \ker(A - \lambda I_n)$

$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}$

(car $X \neq 0$)

$\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A - \lambda I_n) < n$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_A la fonction

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \det(A - xI_n)$$

Thm 4.3 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ est un polynôme de degré n et le coefficient du terme maximal est $(-1)^n$

Remarque : Notons que on peut aussi considérer $\det(xI_n - A)$ au lieu de $\det(A - xI_n)$

seule différence $\det(xI_n - A) = \det(-(A - xI_n))$

$= (-1)^n \det(A - xI_n)$

$\det(xI_n - A)$ est un polynôme unitaire, on fait le choix de $\det(A - xI_n)$ pour raison de simplicité en calcul.

dém! Soit $A - xI_n = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ où

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} - x & \text{si } i = j \\ a_{i,j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\det(A - xI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}$$

$$= \underbrace{\prod_{j=1}^{n} b_{j,j}}_{\sigma = id,\ \varepsilon(id) = 1} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}$$

$$= \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (a_{j,j} - x)}_{\text{un poly. de degré } n} + \underbrace{Q(x)}_{\text{contient des termes de degré} < n}$$

De plus le terme maximale à de coeff. $(-1)^n$.

□.

déf: [polynôme caractéristique]
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, le polynôme χ_A s'appelle le polynôme caractéristique de A

Proposition 4.4 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables alors $\chi_A = \chi_B$

dém: A, B semblables $\Leftrightarrow \exists P$ inversible tq $B = P^{-1}AP$.

$$\chi_B = \det(B - xI_n) = \det(P^{-1}AP - xI_n)$$
$$= \det(P^{-1}(A - xPI_nP^{-1})P)$$
$$= \det(P^{-1}(A - xI_n)P)$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - xI_n) \det P \quad \text{(Thm 3.8)}$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det P \cdot \det(A - xI_n)$$
$$= \frac{1}{\det P} \cdot \det P \cdot \det(A - xI_n)$$
$$= \det(A - xI_n) = \chi_A. \quad \square$$

Remarque (1) On sait que si A, B deux matrice associé à un endomorphisme f, alors A et B sont semblables car pour β, β' deux bases avec $\mathrm{Mat}_\beta(f) = A$ $\mathrm{Mat}_{\beta'}(f) = B$

on a la matrice passage P tq.

$$B = P^{-1}AP.$$

l'inverse de ça est vrai aussi c.a.d.
si A, B sont deux matrices semblables alors, $\exists$ un endomorphisme f et il existent des bases γ, γ' tq. $Mat_\gamma(f) = A$ et $Mat_{\gamma'}(f) = B$.
car si A, B semblebles alors $\exists P$, inversible tq. $P^{-1}AP = B$. Soit γ est une base de E et on considère $f : E \to E$ tq.
$Mat_\gamma(f) = A$. Soit γ' une base tq. $P_{\gamma \leftarrow \gamma'} = P$
On a donc, $B = Mat_{\gamma'}(f)$.

② $\chi_{Mat_B(f)} = \chi_{Mat_{B'}(f)}$. Le polynôme ne depend pas du choix de base Mais uniquement de f. On le note χ_f et on l'appelle le polynôme caractéristique de f

Par remarque 1:

Proposition 45: $n \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{K})$. la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle

est semblable à une matrice diagonale (c.a.d. $\exists$ P inversible tq. $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale)

dém: A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $f_A : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \longrightarrow AX$ est diagonalisable où f_A est associé à $f : E \to E$ pour un choix de base B. c.a.d $Mat_B(f) = A$.

f_A est diagonalisable $\overset{\text{Prop 4.1}}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ une base propre B' de f_A pour E

$\Leftrightarrow \exists\ P_{B \leftarrow B'} =: P$ inversible tq. $P^{-1}AP = Mat_{B'}(f_A)$ est diagonale. □

Par remarque 2 :

THÉORÈME 4.6 :

(1) Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

b) les valeurs propres de f sont exactement

les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

dém: (1) λ est une valeur propre pour A

ssi $\exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$

$\Leftrightarrow X \in \ker(A - \lambda I_n)$
$X \neq 0$

$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow$ la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ est une racine de χ_A.

(2) Suit de remarque précedent et de (1)

□.

Exemples:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$Sp(A) = \{\mp 1\}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\chi_B = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ ← Pas des racines dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow Sp(B) = \emptyset$

3) $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\chi_C = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+1 = (\lambda-i)(\lambda+i) \Rightarrow Sp(A)=\{\pm i\}$

Remarque: le spectre d'une matrice dépend fortement aux corps dans le quel on travail.
Notons aussi que si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ Par le thm d'Alembert-Gauss (aussi appelé thm fondamentale d'Algébre) le polynôme caractéristique des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet toujours n-racines (calculés avec les multiplicitées). A noté que comme l'exemple (2) illustre ce qui n'est pas vrai pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Proposition 4.7: Si A est diagonalisable alors le polynôme caractéristique est scindé (factorisé par des polynômes deg 1).

Dém: A est diagonalisable, par prop. 4.5 si et seulement s'il existe une matrice inversible tq $P^{-1}AP=D$ où D est une matrice diagonale. Ainsi, par proposition 4.4 $\chi_A=\chi_D$. Soit $D=Diag(a_1,\dots,a_n):=\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}$

On a: $\chi_A = \chi_D = \det(D - xI_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - x)$ ← un poly. scindé (notons que on ne dit pas que $a_i \neq a_j$ $\forall i \neq j$ □

Remarque: Puisque $P \Rightarrow q$ équivaut à $\neg q \Rightarrow \neg P$. Prop 4.7 dit aussi que si le polynôme caractéristique n'est pas scindé alors la matrice n'est pas diagonalisable, comme la matrice B dans exemple 2.

Lemme 4.8: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soit λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes de f et V_1, V_2 deux valeurs propres associées à λ_1, λ_2 respectivement alors la famille (V_1, V_2) est libre.

Remarque:
(Lemme 4.8 ainsi que les résultats qui suivent peuvent être reformulé pour les matrices aussi)

Dém: V_i vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i \Rightarrow f(V_i) = \lambda_i V_i$ où $V_1 \neq 0 \neq V_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ tq $\boxed{c_1 V_1 + c_2 V_2 = 0_E}$ (1)

Appliquons f à l'équation (1)

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2) = f(0_E) \underset{f \text{ linéaire}}{\Longrightarrow} c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) = 0_E$$

$$\underset{v_i \text{ vec. prop. assoc. à } \lambda_i}{\Longrightarrow} \boxed{c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0_E} \quad (2)$$

multiplie l'eqn (1) avec λ_2 et soustrait de (2).

On a $c_1(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 + 0 \cdot v_2 = 0_E \Rightarrow c_1(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = 0_E$

OR v_2 est un vecteur propre donc $v_2 \neq 0_E$

et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

Ainsi $c_1(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = 0_E \Rightarrow c_1 = 0$ ce qui à son tour implique que $c_2 = 0$. Donc, (v_1, v_2) est une famille libre. □

Proposition 4.9: Soit $r > 1$ et $(v_1, \dots, v_r)$ une famille des vecteurs de E. On suppose que v_i est un vecteur propre associé à la valeurs propre λ_i, $i = 1, \dots, r$. Si les valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distinctes ($\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall \ i \neq j$). Alors, la famille $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille libre.

dém: Reccurence sur $r > 1$.
Initialisation $r = 2$ Lemme 4.8.
A Finir la démonstration !

□

Corollaire 4.10 : Soit E $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors, f est diagonalisable.

dém : Par Prop. 4.10 la famille des vecteurs propres $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ associé à la valeurs propre λ_i forme une base. Ainsi $(V_1, \dots, V_n)$ est une base propre. Par Proposition 4.1 f est diagonalisable.

Proposition 4.11 : Soit E $\mathbb{K}$-ev soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors les sous-espaces $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_r}(f)$ sont en somme directes.

(un corollaire de Prop. 4.9)

dém : On doit montrer que $\forall w_i \in E_{\lambda_i}(f)$ t.q.

$w_1 + \dots + w_r = 0_E \Rightarrow w_i = 0$. $(p \Rightarrow q)$

Autrement $\forall w_i \in E_{\lambda_i}(f)$, $w_i \neq 0$ on a

$w_1 + \dots + w_r \neq 0_E$ $(\neg q \Rightarrow \neg p)$

OR, ce dernier vient de la proposition 4.9.

Puisque $w_i \neq 0$ et $w_i \in E_{\lambda_i}(f)$, w_i sont des vecteurs propres associé aux valeurs propres λ_i $\forall i \in \{1,\dots,r\}$, respectivement, la famille $(w_1,\dots,w_r)$ est libre. Donc, $w_1+\dots+w_r \neq 0_E$ □

Corollaire 4.12 : Soit E $\mathbb{K}$-esp. vec. de dim finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f) \leq \dim E.$$

dém : Par Proposition 4.11, $E_\lambda(f)$ sont en somme directe on a donc,

$$\dim\left(\sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)\right) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f)$$

de plus $E_\lambda(f)$ est un s.e.v de E $\forall \lambda \in Sp(f)$
Ainsi, $\sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$ est un sous espace de E.
On en déduit le résultat. □.

Rappelons encore que $\lambda \in Sp(f) \Rightarrow \lambda$ est une racine de polynôme carac. f, ainsi $\exists\, m_\lambda \geq 1$ tq. $(x-\lambda)^{m_\lambda}$ divise χ_f et $(x-\lambda)^{m_\lambda+1}$ ne divise pas χ_f.

déf: ① On appelle m_λ la multiplicité algébrique de λ, noté $m_{alg}(\lambda)$, $\forall \lambda \in Sp(f)$.

② $\forall \lambda \in Sp(f)$, $\dim \ker(E_\lambda(f))$, noté $m_{géo}(\lambda)$ s'appelle la multiplicité géométrique de λ

Critères de diagonalisation :

THM 4.13 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors les suivants sont équivalents.

(1) f est diagonalisable

(2) $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E$

(3) χ_f est scindé et $m_{géo}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(f)$.

dém : $(1 \Rightarrow 2)$

f est diagonalisable $\Rightarrow \exists$ une base propre def $(v_1, \dots, v_n)$ pour E. Comme chaque v_i est un vecteur propre, il appartient à un sous-espace propre $E_\lambda(f)$ pour un certain $\lambda \in Sp(f)$.

donc, $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subseteq \sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) \subseteq E$

$\Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E$, puisque la somme est direct par proposition 4.9, car $Sp(f)$ est l'ensemble des valeurs propre donc ces éléments sont distincts même si $\text{card}(Sp(f))$ n'est pas toujours égale à $\dim E$. Donc, on a

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E.$$

(2⇒1) Supposons maintenant que $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E$

Alors, ∃ une base propre de f pour E. Donc, par proposition 4.1, f est diagonalisable

(2⇒3) Supposons que $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E$

Puisque 1⇔2, f est diagonalisable donc par Prop 4.7, χ_f est scindé.

De plus, $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_{geo}(\lambda)$.

D'autre part, χ_f scinde $\Rightarrow \chi_f = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (\lambda - x)^{m_{alg}(\lambda)}$

Puisque $\deg(\chi_f) = \dim E = n \Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_{alg}(\lambda) = n$.

Ainsi, $$\boxed{\sum_{\lambda \in Sp(f)} m_{géo}(\lambda) = n = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_{alg}(\lambda)} \quad (1)$$

Or, $1 \leq m_{géo}(\lambda) = \dim E_\lambda(f) = \dim(\ker(f - \lambda Id)) \leq m_{alg}(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(f)$

Donc, $\forall \lambda \in Sp(\lambda)$, $\boxed{1 \leq m_{géo}(\lambda) \leq m_{alg}(\lambda)}$ (2).

L'eqn (1) et (2) impliquent que $m_{géo}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(f)$.

(3 ⇒ 1) Supposons maintenant que

χ_f scindé et $m_{géo}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(f)$

Soit $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ où $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i \neq j$.

Ainsi par Proposition 4.11 $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe.

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f)\right) = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}(f) = \sum_{i=1}^{r} m_{géo}(\lambda_i)$$

$$\underset{\text{Hypothèse}}{=} \sum_{i=1}^{r} m_{alg}(\lambda_i) = n = \dim E$$

↑ car χ_f scindé et $\deg \chi_f = n$.

Donc, $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f)\right) = n = \dim E$

nécessairement, $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f) = E$ par équivalence

(1), (2) f est diagonalisable. □.

Remarque: Corollaire 4.10 peut être présenté comme

Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable. □