CHP 5 Applications

Puissance d'une matrice

Proposition ST: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, une matrice diagonalisable. Pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$A^k = PD^kP^{-1} \text{ où } D = \text{Diag}(\lambda_1 .. \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et donc $D^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, .., \lambda_n^k)$.

De plus, A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.

dans ce cas $A^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$

dém: Par récurrence sur k

$k=0$ d'un côté $A^0 = I_n$

de l'autre $\lambda_i^0 = 1 \ \forall i = 1..n$ ainsi $D^0 = I_n$

et donc $PDP^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$

Supposons que pour un entier $k \geq 0$ la prop. est vraie

Maintenant,

$$A^{k+1} = A.A^k \underset{\text{HR}}{=} (PDP^{-1})(PD^kP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^kP^{-1}$$
$$= PD^{k+1}P^{-1}$$

Comme $E_0(A) = \ker(A - 0I_n) = \ker(A)$

A est inversible $\Leftrightarrow \ker(A) = \{0_E\} \Leftrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre de A.

Si $\lambda_i \neq 0 \ \forall\ i=1,\dots,n$ $\lambda_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_i}$ et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$

car $D \cdot D^{-1} = D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = I_n$

de plus

$$PD^{-1}P \cdot A = (PD^{-1}P)(PDP^{-1}) = PD^{-1} \cdot D \cdot P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$$
$$A_{diag}$$

similairement, $A \cdot PD^{-1}P^{-1} = I_n$ donc

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

□

Système des suites récurrentes :

Soit $(u_k^{(i)})_{k\geq 0}$, $i=1,\dots,n$ des suites des valeurs dans $\mathbb{K}$.

On considère, $X_k = \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ \vdots \\ u_k^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $\forall\ k \geq 0$, satisfaisant

$X_{k+1} = AX_k$ pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$

on veut trouver $u_k^{(i)}$ comme une fonction de $k, \forall i$.

On suppose que A est diagonalisable.

c.a.d $\exists$ P inversible tq $P^{-1}AP = D$.

Si $P^{-1}AP = D$ alors $A = PDP^{-1}$.

Donc, $X_{k+1} = AX_k \Rightarrow X_{k+1} = PDP^{-1} \cdot X_k$

$\Leftrightarrow P^{-1}X_{k+1} = D\,P^{-1}X_k$.

Soit $Y_k = P^{-1}X_k$ on a donc, $Y_{k+1} = DY_k$.

où $Y_k = \begin{pmatrix} v_k^{(1)} \\ \vdots \\ v_k^{(n)} \end{pmatrix}$ où $v_k^{(i)}$ suites des valeurs dans $\mathbb{K}$.

OR $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc, $Y_{k+1} = DY_k$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots n \quad v_{k+1}^{(i)} = \lambda_i \cdot v_k^{(i)}$, donc $v_k^{(i)}$ sont

des suites géométrique $\Rightarrow v_k^{(i)} = \lambda_i^k \cdot v_0^{(i)}$

Notons que quand $u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(n)}$ donné en utilisant P^{-1}, on peut trouver $\begin{pmatrix} v_0^{(1)} \\ \vdots \\ v_0^{(n)} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_0^{(1)} \\ \vdots \\ u_0^{(n)} \end{pmatrix}$

Donc, $\begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ \vdots \\ u_k^{(n)} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} v_k^{(1)} \\ \vdots \\ v_k^{(n)} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k v_0^{(1)} \\ \\ \lambda_n^k v_0^{(n)} \end{pmatrix}$

↑ donc $u_k^{(i)}$ en fonction de k.

Systèmes d'équations différentielles linéaire

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $x_1, \dots, x_n$ des fonctions $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe C^1 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1} x_1(t) + \dots + a_{1,n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1} x_1(t) + \dots + a_{n,n} x_n(t) \end{cases} \quad (*)$$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$ $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$

on peut donc écrire

$$X'(t) = A X(t)$$

On suppose que A est diagonalisable. Sous cette hypothèse on peut trouver soln du système $(*)$.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P$ inversible tq.

$$P^{-1}AP = D$$

$$\Leftrightarrow A = PDP^{-1} \text{ où}$$

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$X'(t) = AX(t) \iff X'(t) = PDP^{-1}X(t)$$

$$\iff P^{-1}.X'(t) = DP^{-1}X(t)$$

Soit $P^{-1}.X(t) = Y(t)$ puisque dérivation est linéaire $Y'(t) = P^{-1}.X'(t)$.

On a donc, $Y'(t) = D.Y(t)$ où $D = Diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

ce dernière système découpé de n équations différentielle linéaire d'ordre 1, et les solns

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} y_i(0) \quad \forall i = 1, \dots n$$

et les valeurs initiales sont $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$

où $x_1(0), \dots x_n(0)$ sont des valeurs initiales de x_i.

Donc, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ donne la soln à $*$.