Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2026-2027

**Partiel – Durée 90 min – le 3 novembre 2026**

---

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées.**

---

**Exercice 1.** — Soit $A$ l'ensemble suivant :

$$A = \{x \in \mathbf{R},\ |x+2| < 2x+1\}.$$

1. Déterminer l'ensemble $A$.
2. L'ensemble $A$ est-il majoré ?
3. L'ensemble $A$ est il minoré ?

**Exercice 2.** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2} \end{array}$$

et $g = |f|$.

1. Rappeler la définition d'une fonction périodique. La fonction g est-elle périodique ?
2. Tracer les graphes de la fonction $f$ puis de la fonction $g$.
3. Déterminer l'ensemble $A$ suivant

$$A = \{x \in [-\pi, \pi],\ f(x) \geqslant \frac{1}{2}.\}$$

4. Déterminer l'ensemble $B$ suivant

$$B = \{x \in [-\pi, \pi],\ g(x) \geqslant \frac{1}{2}\}.$$

5. Déterminer l'ensemble

$$C = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0\}.$$

**Exercice 3.** Soit $f$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \ln(x^4 - x^2 + 1). \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est bien défine.
2. Justifier que la fonction $f$ est paire.
3. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{\ln 3\})$.
4. La fonction $f$ est-elle injective ?
5. On admet que $f$ est dérivable. Calculer sa dérivée $f'$.
6. Étudier les variations de $f$.
7. Démontrer que l'image de $\mathbf{R}$ par $f$ est l'intervalle $\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right[$, c'est-à-dire

$$f(\mathbf{R}) = \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right[.$$

8. Soit $g$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[ & \to & \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right[ \\ & x & \mapsto & g(x) = \ln(x^4 - x^2 + 1). \end{array}$$

Démontrer que $g$ est une bijection et expliciter sa bijection réciproque.