



Licence 1 Mathématiques Informatique.

ANALYSE 1 POUR L'INFORMATIQUE

Christophe Poquet

Année universitaire 2026/2027

Table des matières

Table des matières	1
1 Nombres réels	5
1 Ensembles de nombres	5
2 Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels	9
3 Valeur absolue	13
4 Intervalles de $\mathbb{R}$	14
5 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure	16
2 Fonctions réelles	20
1 Fonctions et graphes	20
2 Fonctions injectives, surjectives, bijectives	23
3 Image directe, image réciproque. .	30

4	Opérations sur les fonctions.	33
5	Propriétés des fonctions et de leur graphe.	35
6	Limite en un point, continuité, déri- vabilité.	39
3	Fonctions usuelles	44
1	Fonctions polynomiales	44
2	Fonction partie entière	45
3	Fonctions trigonométriques	47
4	Fonctions trigonométriques réci- proques	50
5	Fonctions exponentielle et logarithme	54
6	Fonctions hyperboliques	59
7	Fonctions puissance	62
8	Croissance comparée	63
4	Suites réelles	65
1	Définitions	65
2	Suites classiques	68
3	Convergence de suite	71
4	Opérations sur les limites	76
5	Limites de suites et inégalités . . .	79
6	Convergence et monotonie	81
7	Suites extraites	85
8	Limites infinies	87

9	Comparaison de suites	96
10	Suites de Cauchy	100
5	Continuité	101
1	Limite de fonction	101
2	Continuité	109
3	Théorème des valeurs intermé- diaires et image continue d'un inter- valle	112
4	Limite, continuité et monotonie . .	116
	Bibliographie	120

Ce polycopié de cours est issu d'un cours donné de 2023 à 2026 à l'Université Claude Bernard Lyon 1. Il a été rendu plus accessible aux lecteurs dyslexiques en utilisant le travail décrit dans *Making an Accessible Open Logic Textbook (for Dyslexics)* par Richard Zach¹.

Le code latex pour la présentation du cours de *Topologie et Théorie de la mesure.* par Y. Dabrowski a été utilisé avec permission. Ce code est une adaptation pour les cours de mathématiques du code latex du livre *forallx: Calgary (Accessible)* par P.D. Magnus, Tim Button, Robert Trueman et Richard Zach, utilisé sous licence CC BY 4.0.

1. Voir aussi du même auteur *Accessible Open Textbooks in Math-Heavy Disciplines The challenge*

Chapitre 1

Nombres réels

1 Ensembles de nombres

Les entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

est **l'ensemble des entiers naturels**. Si l'on enlève le 0 on définit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ **l'ensemble des entiers naturels non nuls**.

Les entiers relatifs

En ajoutant les entiers négatifs on définit **l'ensemble des entiers relatifs** par

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

De même, si l'on enlève le 0, on définit

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ **l'ensemble des entiers relatifs non nuls.**

Remarque 1.1.

1. On remarque que l'ensemble $\mathbb{N}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

où le symbole $\subset$ se lit « est inclus dans ». En effet, tout élément de $\mathbb{N}$ est également élément de $\mathbb{Z}$, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\text{si } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } n \in \mathbb{Z},$$

où le symbole $\in$ se lit « appartient à ».

2. On voit immédiatement que l'inclusion réciproque est fausse, c'est-à-dire $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, puisque par exemple $-1 \in \mathbb{Z}$ alors que $-1 \notin \mathbb{N}$.
3. Attention à ne pas confondre les symboles $\subset$ et $\in$!

Les nombres rationnels

On définit l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarque 1.2.

1. Puisque tout entier relatif n peut être écrit sous la forme

$$n = \frac{n}{1},$$

on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. Un nombre rationnel peut être représenté par différentes fractions, par exemple $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$. Plus précisément, pour $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si et seulement si} \quad ab' = a'b.$$

Attention, l'expression « P si et seulement si Q », que l'on peut abréger en « P ssi Q » ou « $P \Leftrightarrow Q$ » (voir le cours d'Algèbre 1), signifie deux choses : « si P est vraie alors Q est vraie » et « si Q est vraie alors P est vraie ».

Les nombres décimaux

On définit l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il s'agit des nombres ayant une suite **finie** de chiffres à droite de la virgule.

Remarque 1.3.

1. Tous les éléments de $\mathbb{D}$ peuvent être écrit sous forme de fraction, et donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. L'inclusion réciproque est fausse, puisque certaines fractions ne peuvent être écrites qu'avec une infinité de chiffres après la virgule, comme par exemple

$$\frac{1}{3} = 0.333333333333333333333333 \dots$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ donne un rôle privilégié au nombre 10 (les dix doigts des mains). Du point de vue des mathématiciens, les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont plus importants.

Les nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale est composée de

- un signe + ou – (généralement omis lorsque c'est le +),

- une suite finie de chiffres entre 0 et 9, ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0,
- une virgule,
- une suite infinie de chiffres entre 0 et 9.

Exemples 1.1

Par exemple 0, 4, -10.3 , $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π sont des nombres réels.

Remarque 1.4.

1. Attention avec cette définition un réel ne s'écrit pas de manière unique, par exemple $1 = 1.0$, $0 = 0.0 = -0 = -0.00$, $1 = 0.9999999999 \dots$
2. On a l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mais l'inclusion réciproque est fausse, on ne peut par exemple pas écrire $\sqrt{2}$ comme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ (voir le cours d'Algèbre 1).

2 Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels

Dans l'enfance on apprend à additionner, multiplier et comparer les entiers. Ceci s'étend aux nombres réels (résultat admis, fastidieux à démontrer).

Proposition 1.2

On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition $+$ et une multiplication $\cdot$ (ou $\times$) qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et ont les propriétés suivantes :

1. **commutativité** : pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a

$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

2. **associativité** : pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{et} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

3. **distributivité** : pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

4. **éléments neutres** : pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$a + 0 = a \quad \text{et} \quad a \cdot 1 = a,$$

5. **élément absorbant** : pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$a \cdot 0 = 0.$$

Proposition 1.3

On peut définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre $\leq$ qui prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **réflexivité** : pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a

$$a \leq a,$$

2. **antisymétrie** : pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a, \text{ alors } a = b,$$

3. **transitivité** : pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c, \text{ alors } a \leq c,$$

4. **ordre total** : pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a,$$

5. **compatibilité avec l'addition** : pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } a + c \leq b + c,$$

6. **compatibilité avec la multiplication** : pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } c \geq 0, \text{ alors } a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Remarque 1.5. En mathématiques le « ou » est **inclusif** : « A ou B » signifie soit A , soit B , soit les deux.

$a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b ». On écrit de plus, pour a, b dans $\mathbb{R}$

- ▷ $a \geq b$ (qui se lit « a supérieur ou égal à b ») si $b \leq a$,
- ▷ $a < b$ (qui se lit « a strictement inférieur à b ») si $a \leq b$ et $a \neq b$,
- ▷ $a > b$ (qui se lit « a strictement supérieur à b ») si $b < a$.

On remarque que le contraire de $a \leq b$ est $a > b$.

Remarque 1.6.

1. On ne peut pas soustraire des inégalités : on a $2 \leq 3$ et $1 \leq 4$ mais $2 - 1 = 1$ n'est pas inférieur ou égal à $3 - 4 = -1$!
2. La multiplication par un réel négatif change le sens de l'inégalité : si a, b, c sont des réels,

si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $a \cdot c \geq b \cdot c$.

3 Valeur absolue

Définition 1.4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **valeur absolue** de x , notée $|x|$, de la manière suivante :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 1.5

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a

$$|a| = |-a| = \sqrt{a^2} = \max(-a, a),$$

2. pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a

$$|a| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad a = 0,$$

3. pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

4. **inégalité triangulaire** : pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

5. **inégalité triangulaire inverse** : pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a

$$|a - b| \geq \left| |a| - |b| \right|.$$

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue.

Démontrons le point 4. Considérons deux réels a et b . D'après 1) on a $|a + b| = \max(a + b, -a - b)$. Mais comme $a \leq \max(-a, a) = |a|$ et $b \leq |b|$ on a $a + b \leq |a| + |b|$. De même, comme $-a \leq |a|$ et $-b \leq |b|$ on a $-a - b \leq |a| + |b|$. Ainsi

$$|a + b| = \max(a + b, -a - b) \leq |a| + |b|.$$

Finalement démontrons le point 5). Considérons à nouveaux deux réels a et b . D'une part d'après 4) on a $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ et donc $|a - b| \geq |a| - |b|$. D'autre part on a $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$ et donc $|a - b| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. On en déduit bien

$$|a - b| \geq \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = ||a| - |b||.$$

□

4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Intuitivement, un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ».

Définition 1.6: Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle de $\mathbb{R}$** si, pour tous x, y éléments de I , tout réel z vérifiant $x \leq z \leq y$ est également un élément de I .

Proposition 1.7

Les intervalles I de $\mathbb{R}$ ont l'une des formes suivantes :

1. $\mathbb{R}$,
2. $\emptyset$, **l'ensemble vide**, qui ne contient aucun élément,
3. $\{a\}$, **un singleton**, avec $a \in \mathbb{R}$,
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, **un segment**, avec a, b réels vérifiant $a < b$,
5. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
 $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ou
 $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, avec a, b réels vérifiant $a < b$,
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
 $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ou
 $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, avec a réel.

Remarque 1.7. Dans les points 4., 5. et 6. de la proposition précédente les réels a et b sont appelés les **bords** de l'intervalle.

5 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

Définition 1.8

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de A .

1. On dit que a est le **plus grand élément de A** (ou **maximum** de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \leq a$,
2. On dit que a est le **plus petit élément de A** (ou **minimum** de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \geq a$.

S'il existe, le plus grand élément de A est unique, on le note $\max(A)$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique, on le note $\min(A)$.

Exemples 1.9

1. Une partie finie A de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé d'un nombre fini d'éléments) a toujours un plus grand élément.
2. 1 est le plus grand élément de $[0, 1]$.
3. $\mathbb{N}$ et $[0, 1[$ n'admettent pas de plus grand élément.