Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour l'informatique
Semestre d'automne 2026-2027

Contrôle partiel – Sujet blanc

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de «f est décroissante».

Solution: «f est décroissante» signifie

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ vérifiant

$$\frac{x-5}{x-2} < \frac{x-4}{x-1}.$$

Solution: Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{x-5}{x-2} < \frac{x-4}{x-1} &\Leftrightarrow \frac{x-5}{x-2} - \frac{x-4}{x-1} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-5) - (x-2)(x-4)}{(x-1)(x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x^2-6x+5) - (x^2-6x+8)}{(x-1)(x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-3}{(x-1)(x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x-2)} > 0.
\end{aligned}$$

Un tableau de signe permet de conclure que l'ensemble solution est $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des réels où elles sont dérivables, et calculer leurs dérivées.

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, \quad g(x) = \cos^4(3x), \quad h(x) = \cos(x^2 \ln(x)).$$

Solution: Comme $y \mapsto \sqrt{y}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $x \mapsto 1 + x^4$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $1 + x^4 > 0$ pour tout x réel, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Pour tout réel x on a

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}} = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}.$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque définie comme composée de fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel on a

$$g'(x) = -3\sin(3x) \cdot 4\cos^3(3x) = -12\sin(3x)\cos^3(3x).$$

Comme $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ alors que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, h est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par produit et composition. Pour tout réel $x > 0$ on a

$$h'(x) = \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \big(-\sin(x^2 \ln(x))\big) = -(2\ln(x) + 1)x \sin(x^2 \ln(x))$$

Exercice 4 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}}.$$

1. Calculer, pour x réel, $f(-x)$. La fonction f est-elle paire ou impaire ?

   Solution: On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque les fonctions sin et cos sont respectivement

   $$f(-x) = \frac{e^{\sin(-x)} - e^{-\sin(-x)}}{1 + e^{\cos(-x)}} = \frac{e^{-\sin(x)} - e^{\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}} = -\frac{e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}} = -f(x).$$

   f est donc impaire.

2. Montrer que f est périodique de période 2π. La fonction f est-elle injective ? Justifier.

   Solution: Comme les fonction sin et cos sont 2π-périodiques on a, pour tout x réel,

   $$f(x + 2\pi) = \frac{e^{\sin(x+2\pi)} - e^{-\sin(x+2\pi)}}{1 + e^{\cos(x+2\pi)}} = \frac{e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}} = f(x).$$

   En particulier on a $f(0) = f(2\pi)$, f n'est pas injective.

3. Montrer que pour tout x réel on a

   $$0 \leq e^{\sin(x)} \leq e.$$

   Solution: Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives on a, pour tout x réel,

   $$e^{\sin(x)} \geq 0.$$

   De plus, comme pour tout x réel on a $\sin(x) \leq 1$ et comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ on a

   $$e^{\sin(x)} \leq e^1 = e.$$

4. Montrer que pour tout x réel on a $|f(x)| \leq 2e$. La fonction f est-elle surjective ? Justifier.

   Solution: Soit x un réel. On a, puisque $1 + e^{\cos(x)} \geq 0$ et en appliquant l'inégalité triangulaire,

   $$|f(x)| = \frac{\left|e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}\right|}{1 + e^{\cos(x)}} \leq \frac{\left|e^{\sin(x)}\right| + \left|e^{-\sin(x)}\right|}{1 + e^{\cos(x)}} = \frac{e^{\sin(x)} + e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}}.$$

   En appliquant la question précédente on obtient $0 \leq e^{\sin(x)} \leq e$ et $0 \leq e^{\sin(-x)} \leq e$ et donc, puisque $\frac{1}{1+e^{\cos(x)}} \geq 0$,

   $$\frac{e^{\sin(x)} + e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}} \leq \frac{2e}{1 + e^{\cos(x)}}.$$

   De plus, puisque $1+e^{\cos(x)} \geq 1$ et la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{1+e^{\cos(x)}} \leq 1$. Au final on obtient

   $$|f(x)| \leq \frac{e^{\sin(x)} + e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}} \leq \frac{2e}{1 + e^{\cos(x)}} \leq 2e.$$

   On a montré que pour tout x réel on a $-2e \leq f(x) \leq 2e$. En particulier $3e$ n'a pas d'antécédent par f, f n'est pas surjective.

Exercice 5 : Soient un réel x. Montrer que

$$E(x + 1) = E(x) + 1,$$

où E désigne la partie entière.
Indication : on pourra montrer que $E(x) + 1 \leq E(x + 1)$ et que $E(x + 1) \leq E(x) + 1$.

Solution: Soit x un réel. D'une part on sait que

$$E(x) \leq x,$$

ce qui implique que

$$E(x) + 1 \leq x + 1.$$

$E(x) + 1$ est donc un entier inférieur ou égal à $x + 1$, et donc

$$E(x) + 1 \leq E(x + 1).$$

D'autre part, on sait que

$$E(x + 1) \leq x + 1,$$

ce qui implique

$$E(x + 1) - 1 \leq x.$$

$E(x + 1) - 1$ est donc un entier inférieur ou égal à x, et on a donc

$$E(x + 1) - 1 \leq E(x),$$

ce qui implique

$$E(x + 1) \leq E(x) + 1.$$

Au final on a bien montré que $E(x + 1) = E(x) + 1$.