

Contrôle partiel – Sujet blanc

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de « f est décroissante».

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ vérifiant

$$\frac{x-5}{x-2} < \frac{x-4}{x-1}.$$

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des réels où elles sont dérivables, et calculer leurs dérivées.

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, \quad g(x) = \cos^4(3x), \quad h(x) = \cos(x^2 \ln(x)).$$

Exercice 4 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}}{1 + e^{\cos(x)}}.$$

1. Calculer, pour x réel, $f(-x)$. La fonction f est-elle paire ou impaire ?
2. Montrer que f est périodique de période 2π . La fonction f est-elle injective ? Justifier.
3. Montrer que pour tout x réel on a

$$0 \leq e^{\sin(x)} \leq e.$$

4. Montrer que pour tout x réel on a $|f(x)| \leq 2e$. La fonction f est-elle surjective ? Justifier.

Exercice 5 : Soient un réel x . Montrer que

$$E(x+1) = E(x) + 1,$$

où E désigne la partie entière.

Indication : on pourra montrer que $E(x) + 1 \leq E(x+1)$ et que $E(x+1) \leq E(x) + 1$.