Feuille 3 : Suites réelles

Exercice 1 : (Recherche par dichotomie). À l'aide d'un ordinateur, on cherche un élément dans un tableau trié (par exemple, un mot dans un dictionnaire alphabétique pouvant ne pas le contenir), de manière récursive. Pour simplifier on ne considérera que des tableaux tels que, à chaque étape décrite ci-dessous, on ait un nombre impair d'éléments. A chaque itération de l'algorithme on compare l'élément central du tableau à l'élément recherché : s'il correspond, la recherche s'arrête ; sinon, on conserve uniquement la moitié du tableau où le mot pourrait encore se trouver, selon l'ordre, et on itère le processus sur cette partie conservée.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note u_n la taille des tableaux triés dans lesquels on est capable de rechercher un élément par dichotomie en n itérations. Que vaut u_1 ? Trouver une relation de récurrence reliant u_{n+1} à u_n.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
3. En utilisant les questions précédentes, exprimer u_n en fonction de n.
4. En combien d'étapes peut-on rechercher un élément dans un tableau de taille 1 To contenant des éléments ayant chacun une taille 1 Ko ?

Exercice 2 : (Variations). Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n - 2^n$
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
6. $u_n = n - \sinh(n)$.

Exercice 3 : (Variations et bornes sup/inf). Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de $\sup_n u_n$ et $\inf_n u_n$.

1. $u_n = 2^n$
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
3. $u_n = 3^{-n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$

Exercice 4 : (Des limites). Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
8. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
10. $u_n = \cos(n\pi)$
11. $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$
12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
13. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
14. $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{n}$
15. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}}$

Exercice 5 : ($(\sin(n))_n$). L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite $(\sin n)_n$ n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_n \sin n = \ell$.

1. En exprimant, pour tout entier naturel n, $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et $\cos n$, montrer que la suite $(\cos n)$ admet une limite $\tilde{\ell}$ et donner une relation entre ℓ et $\tilde{\ell}$.
2. Quelle autre relation existe-t-il entre ℓ et $\tilde{\ell}$?
3. Montrer que, pour tout n, on a $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1$.

4. Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que $\ell = 0$.
5. Conclure.
6. Justifier que la suite $(\sin n)_n$ admet une suite extraite convergente.

Exercice 6 : (Suite monotone). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 7 : (Suites presque géométriques).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 8 : (Avec des ε). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 9 : (Rangs pairs et impairs).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 10 : (Limites et somme). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 11 : (Opérations sur les limites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 12 : (Suite arithmético-géométrique). On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.

3. Déterminer v_n en fonction de n.
4. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Exercice 13 : (Suites adjacentes). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
3. Étudier la suite $(v_n - u_n)$.
4. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ? De leur limite éventuelle ?

Exercice 14 : (Suites adjacentes - Encore !). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Exercice 15 : (Encadrement). Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout k entre 1 et n, on a :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

4. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à 1.

Exercice 16 : (Des suites de moyennes). Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.
On note ainsi : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 0$. Expliciter les suites (u_n) et (v_n) en fonction de n et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que $a = b$. Étudier les suites (u_n) et (v_n).
3. On suppose que a est strictement positif.
   (a) Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs satisfaisant $x \leq y$ on a

$$x \leq \sqrt{xy}, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \frac{x+y}{2} \leq y, \quad \text{et} \quad \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{y-x}{2}.$$

   (b) Montrer que, pour tout n, on a $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Exercice 17 : (Moyenne de Cesàro). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Exercice 18 : (Téléscopages !).

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 19 : Classer les suites de termes généraux suivants par ordre de «négligeabilité» :

$$a_n = n^{\frac{1}{3}},\quad b_n = n^{10},\quad c_n = (n!)^{\frac{1}{20}},\quad d_n = \frac{n}{\ln(n)},\quad e_n = \frac{e^n}{n^5},\quad f_n = \frac{e^{2n}}{n!},\quad g_n = 1.$$

Exercice 20 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier votre réponse.

1. $1000 = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$
2. $n^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^3)$
3. $n^3 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$
4. $(n+1)^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$
5. $2^{n+1} = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$
6. $2^{2n} = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$

Exercice 21 : Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^4 + n^2 + 1} - n}{(\ln(n))^3 - n + 6}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n-2}$
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Exercice 22 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont-elles vraies ?

1. $(n+1)^3 \underset{n\to\infty}{\sim} n^3$
2. $3^{n^2+2} \underset{n\to\infty}{\sim} 3^{n^2}$
3. $3^{n^2+2} = \underset{n\to\infty}{O}\left(3^{n^2}\right)$
4. $3^{n^2-n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(3^{n^2}\right)$
5. $3^n\, n^2 = \underset{n\to\infty}{O}(n!)$
6. $\ln(1+2^n) = \underset{n\to\infty}{O}(n)$