Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles

Exercice 1 : (Injection, surjection, bijection). Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ? Justifier à l'aide du graphe des fonctions.

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.

Solution:

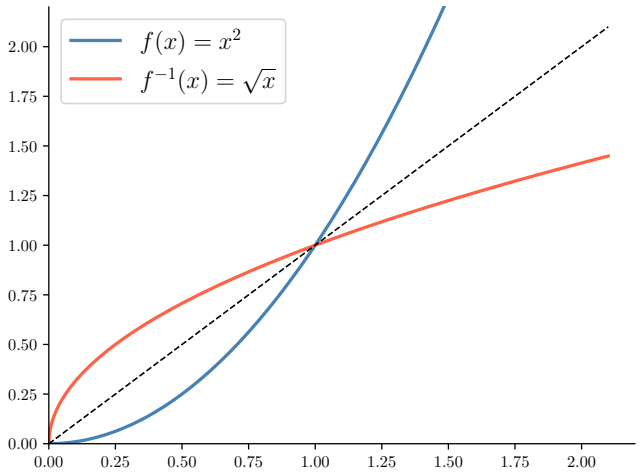
1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$ est surjective, mais pas injective ni bijective.
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$ est injective mais pas surjective ni bijective.
4. $f_4 : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$ est surjective mais pas injective ni bijective.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$ est injective, surjective et bijective. .
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$ n'est ni surjective (l'intervalle $]0, 1[$ n'est pas couvert) ni injective ($f_6(x) = f_6(-x)$) ni bijective.

Exercice 2 : (Trinôme). Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Rappeler les variations de f en fonction du signe de a.
2. Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement ?
3. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$.

Solution:

1. Si a est strictement positif, alors f est décroissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et croissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
   Si a est strictement négatif, alors f est croissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et décroissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
2. La courbe représentative de f est une parabole. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -b/2a$. Algébriquement, cette propriété de symétrie se traduit par : pour tout réel h, on a
$$f\left(\frac{-b}{2a} + h\right) = f\left(\frac{-b}{2a} - h\right).$$
3. On distingue suivant le signe du discriminant de f, noté Δ :
   — Si Δ est strictement négatif, alors, f ne s'annule pas et, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
   — Si Δ est nul, alors f n'annule en $-b/(2a)$ et est du signe de a sur $\mathbb{R}$ privé de $-b/(2a)$.
   — Si Δ est strictement positif, alors f s'annule en $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et en $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, et est du signe de a en dehors de l'intervalle formé par r_1 et r_2, et du signe opposé sur l'intervalle formé par r_1 et r_2.
4. Consulter le graphique ci-dessous.



D'après le cours, la courbe de g est la symétrique de f par rapport à la première bissectrice.

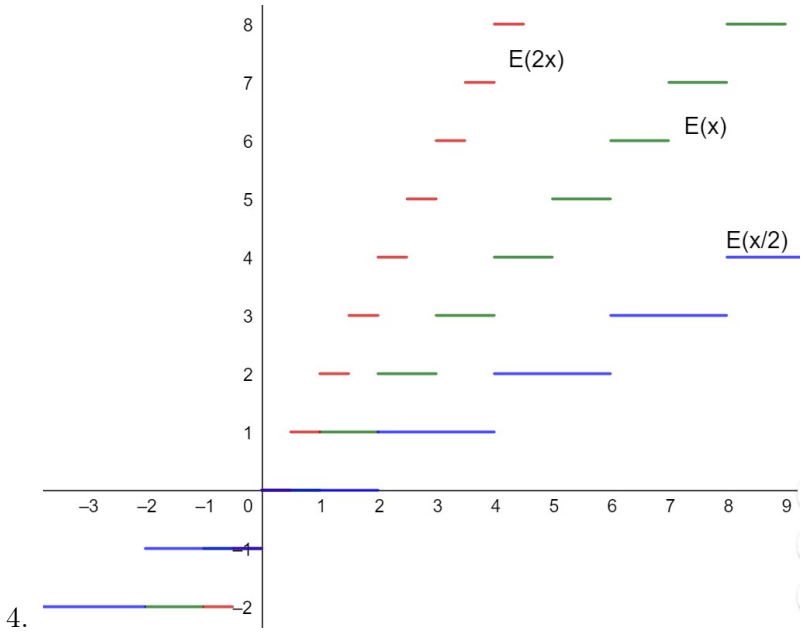
Exercice 3 : (Partie entière). On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Déterminer l'ensemble des réels x satisfaisant $1 \leq E(2x) \leq 3$.
4. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

Solution:

1. Par définition de E, l'image d'un réel par E est un entier relatif, donc $E(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
   Réciproquement, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. En effet, pour tout entier relatif k, on a $E(k) = k$, donc $\mathbb{Z}$ est inclus dans $E(\mathbb{R})$.
2. 0 est un entier relatif et $0 \leq 0.5 < 0 + 1$, donc $E(0.5) = 0$.
   De même, -2 est un entier relatif et $-2 \leq -1.5 < -2 + 1$, donc $E(-1.5) = -2$.
3. Soit un réel x. $E(2x)$ est l'unique entier satisfaisant $E(2x) \leq 2x < E(2x) + 1$.
   — si $E(2x) \leq 3$ alors $2x < 3 + 1 = 4$. Réciproquement, si $2x < 4$, alors $E(2x) \leq 2x < 4$, et comme $E(2x)$ est un entier cela implique $E(2x) \leq 3$. On a donc montré que $E(2x) \leq 3$ si et seulement si $2x < 4$.
   — si $E(2x) \geq 1$, alors $2x \geq E(2x) \geq 1$. Réciproquement, si $2x \geq 1$, alors $E(2x) > 2x - 1 = 0$, mais comme $E(2x)$ est un entier cela implique que $E(2x) \geq 1$. On a donc montré que $E(2x) \geq 1$ si et seulement si $2x \geq 1$.

   En conclusion, on a $1 \leq E(2x) \leq 3$ si et seulement si $1 \leq 2x < 4$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{2} \leq x < 2$.

4. 

Exercice 4 : (Trigo). Calculer les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *Indication :* $2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.
5. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solution:

1. On a $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$
2. On a $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$
3. On a $\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{11\pi}{4}+3\pi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$
4. On a
$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-1,$$
et donc
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$
Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ on en déduit
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$
5. On a
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4},$$
et comme $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ on en déduit
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 5 : (Trigo - encore). Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x+y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x+y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin y$.
2. Montrer que $1+\sin x=\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

   (a) $f_1(x) = \cos^2 x$

   (b) $f_2(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

   (c) $f_3(x) = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$

   (d) $f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.

Solution:

1. Soient x et y deux réels.
   On a $\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
   On a également $\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y$, et $\sin(2x) = 2\sin x\ \cos x$.
2. Soit x un réel. On a
$$\begin{aligned}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \sin\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= 1 + \sin x.\end{aligned}$$
3. Soit x un réel. On a
$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2(2x)) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 \\ &= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\sin(4x) &= \sin(2(2x)) \\ &= 2\sin(2x)\ \cos(2x) \\ &= 4\sin x\ \cos x\ (2\cos^2 x - 1) \\ &= 8\sin x\ \cos^3 x - 4\sin x\ \cos x\end{aligned}$$
4. Soit x un réel n'appartenant pas à $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire pour lequel $\tan x$ est bien défini.

   (a)
$$\begin{aligned}f_1(x) = \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan^2 x + 1}.\end{aligned}$$

   (b) On suppose de plus pour cette question que $|\sin x| \neq |\cos x|$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. On a :
$$f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\tan^4 x + 1}{\tan^4 x - 1}$$

   (c) On suppose de plus pour cette question que $\sin x \neq \cos x$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. On a :
$$\begin{aligned}f_3(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} &= \frac{\cos^3 x\ (\tan^3 x - 1)}{\cos x\ (\tan x - 1)} \\ &= \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x - 1} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x}\left(\tan^2 x + \tan x + 1\right)\end{aligned}$$

   (d)
$$\begin{aligned}f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x &= \cos^2 x(1 - \tan x) \\ &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x}\end{aligned}$$

Exercice 6 : (Trigo - toujours !).

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue x : $\sin x = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y, $\sin(y+\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos y$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :

$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solution:

1. Soient a et b deux réels. On a

$$\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b \qquad \text{et} \qquad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$

2. Soit x un réel. On a $\sin x = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$
3. Soit y et θ deux réels. On a $\sin(y+\theta) = \cos\theta\ \sin y + \sin\theta\ \cos y$.
   On remarque qu'en choisissant $\theta = \pi/4$, on obtient :

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y.$$

4. Soit y un réel. On remarque que

$$\begin{aligned}\sin y + \cos y &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y\right)\\ &= \sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

   On a donc $\sin y + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation $\sin y + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est donc $\left\{\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 7 : (Composition).

1. Soient I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et $f : J \to K$ et $g : I \to J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

   (a) $x \mapsto (1+2x)^2$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; (c) $x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Solution:

1. Le plus simple est probablement de distinguer quatre cas suivant les sens de variation de f et g. On remarque alors que $f \circ g$ est croissante si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et que $f \circ g$ est décroissante si l'une est croissante et l'autre décroissante.
2. Les décompositions proposées ne sont pas uniques ! Chacune des décompositions proposées fait intervenir la fonction carré, qui est bien entendu décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Soit $h_1 : x \mapsto (1+2x)^2$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction (affine et croissante) $x \mapsto 1+2x$ par la fonction carré $y \mapsto y^2$. La fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que h est croissante sur $[-0.5, +\infty[$ et décroissante $]-\infty, -0.5]$.
   (b) Soit $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction carré par la fonction $y \mapsto 1/(1+y)$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction h_2 est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Soit $h_3 : x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Exercice 8 : (Image directe, image réciproque). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f([0,3])$.
2. $f^{-1}([0,4])$
3. $f^{-1}([-1,4])$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4])$
5. $\sin([0,\pi])$
6. $\sin^{-1}(\{0.5\})$
7. $\sin^{-1}([-0.5,0.5])$
8. $\tan^{-1}([-1,1])$.
9. $E([-1.5,1.5])$.
10. $E^{-1}([-1,1]\cup\{2\})$.

Solution:

1. $f([0,3]) = [0,9]$.
2. $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$
3. $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4]) = [-2,-\sqrt[4]{2}]\cup[\sqrt[4]{2},2]$.
5. $\sin([0,\pi]) = [0,1]$.
6. On utilise le fait que la fonction sin est de période 2π et que $\pi/6$ et $5\pi/6$ sont les 2 réels x de $[-\pi,\pi]$ tels que $\sin x = 1/2$. On a donc : $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
7. On utilise la périodicité de la fonction sin et le fait que $\sin[-\pi/6,\pi/6] = [-1/2,1/2]$ et $\sin[5\pi/6,7\pi/6] = [-1/2,1/2]$. On obtient :
$$\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\bigcup\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right].$$
8. On utilise la périodicité de la fonction tan, sa monotonie sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et le fait que $\tan[-\pi/4,\pi/4] = [-1,1]$. On en déduit :
$$\tan^{-1}([-1,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right].$$
9. $E([-1.5,1.5]) = \{-2,-1,0,1\}$.
10. $E^{-1}([-1,1]\cup\{2\}) = E^{-1}(\{-1,0,1,2\} = [-1,3[$.

Exercice 9 : (Réciproque de fonctions circulaires).

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi,3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi,3\pi]$.
Exprimer $f^{-1} : [-1,1] \to [2\pi,3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi,2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi,2\pi]$.
Exprimer $g^{-1} : [-1,1] \to [\pi,2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Solution:

1. La fonction cos est 2π-périodique, donc pour tout réel x, on a $\cos(x-2\pi) = \cos x$.
La fonction arccos a pour ensemble image l'intervalle $[0,\pi]$, donc pour tout x de $[2\pi,3\pi]$, on a
$$x = 2\pi + \arccos(\cos(x)) = 2\pi + \arccos(f(x))$$
La fonction réciproque de f est donc la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[-1,1]$ par $\tilde{f}(t) = 2\pi + \arccos(t)$.
2. Soit t un réel de $[-1,1]$. Notons $u = \arccos(t)$. On sait que u appartient à $[0,\pi]$, que $\cos(u) = \cos(2\pi-u)$, et que $2\pi - u$ appartient à $[\pi,2\pi]$.
On a donc $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$.
On a donc, pour tout $t\in[-1,1]$, $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$

Exercice 10 : (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul). Calculez les valeurs suivantes :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$
8. $\tan(\arctan(3))$.

Solution:

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
4. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
8. $\tan(\arctan(3)) = 3$.

Exercice 11 : (Dérivée). Déterminer l'ensemble des réels où f_i est dérivable et calculer sa dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^3}{4}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{x}$
3. $f_3 : x \mapsto \sin^2 x$
4. $f_4 : x \mapsto \sin(x^2)$
5. $f_5 : x \mapsto \cos^2(3x)$
6. $f_6 : x \mapsto 3x^2 \sin(x^3)$
7. $f_7 : x \mapsto e^{2x+1}$
8. $f_8 : x \mapsto e^{x^2}\cos(3x)$
9. $f_9 : x \mapsto \frac{1-x}{2+x}$
10. $f_{10} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
11. $f_{11} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
12. $f_{12} : x \mapsto \ln(1+x^4)$
13. $f_{13} : x \mapsto \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
14. $f_{14} : x \mapsto \ln|\cos x|$
15. $f_{15} : x \mapsto \tan(x^2)$

Solution:

1. La fonction $x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f_1 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout réel x, $f_1'(x) = \frac{3}{4}x^2$.
2. Les fonctions $x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_2 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout x strictement positif
$$f_2'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}-1} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{6}{x^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
3. La fonction sin est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction carré aussi. La fonction f_3 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on a, pour tout réel x, $f_3'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.
4. Par les mêmes arguments, on justifie que f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_4'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$.
5. La fonction f_5 est la composée d'une fonction linéraire, de la fonction cos et de la fonction carré : elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_5'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(3x)) \cdot \cos(3x) = -3\sin(6x)$.
6. Les fonctions x^2, x^3 et sin sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, comme f_6 est définie par composition et produit de ces fonctions elle est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel on a
$$f_6'(x) = 6x\sin(x^3) + 9x^4\cos(x^3).$$
7. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est définie par la composée de le fonction exponentielle et d'une fonction affine, et on a pour tout réel x : $f_7'(x) = 2e^{2x+1}$.
8. f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est définie comme par composition et produit de fonctions usuelles définie et dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout x réel
$$f_8'(x) = 2xe^{x^2}\cos(3x) - 3e^{x^2}\sin(3x).$$
9. f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, et pour tout réel x différent de 2, on a $f_9(x) = -1 + \frac{3}{2+x}$ donc
$$f_9'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2}.$$

10. La fonction f_{10} est définie pour tout x de $[-1,1]$, et dérivable pour tout x de $]-1,1[$. Par dérivée d'une fonction composée on a
$$f'_{10}(x) = -2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et à valeurs supérieures à 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc par composition f_{11} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout x réel
$$f'_{11}(x) = 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

12. La fonction ln étant définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1+x^4$ étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$, la fonction f_{12} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f'_{12}(x) = \dfrac{4x^3}{1+x^4}$.

13. La fonction f_{13} est définie et dérivable pour tout x différent de -1 et 1. Sa dérivée est un peu plus simple à calculer si on utilise les propriétés de la fonction ln : pour tout réel x différent de 1 et -1, on a $f_{13}(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$. On sait que la dérivée de $ln|x|$ est $1/x$ pour $x>0$ et $-1/(-x) = 1/x$ également pour $x<0$, donc $(\ln \circ |u|)' = u'/u$. Ainsi $f'_{13}(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

14. La fonction f_{14} est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos(x)$ est non nul, c'est-à-dire, pour tout x n'appartenant pas à $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
$$f'_{14}(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

15. La fonction tan est définie et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, où k est un entier relatif, donc f_{15} est définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right[$ et sur tout intervalle de la forme $\left]\sqrt{k\pi - \dfrac{\pi}{2}}, \sqrt{k\pi + \dfrac{\pi}{2}}\right[$, ou $\left]-\sqrt{k\pi - \dfrac{\pi}{2}}, -\sqrt{k\pi + \dfrac{\pi}{2}}\right[$ pour k un entier naturel non nul. La dérivée de la fonction tan étant la fonction $1+\tan^2$, on a, pour tout x tel que f_{15} est bien définie : $f'_{15}(x) = 2 \cdot x \cdot (1+\tan^2(x^2))$

Exercice 12 : (Fonctions hyperboliques) Montrer que pour tous réels u et v, on a :
$$\cosh^2 u + \sinh^2 v = \sinh^2 u + \cosh^2 v = \cosh(u+v)\cosh(u-v)$$
$$\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh^2 u - \sinh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$$

Solution: Soient u et v deux réels. On a
$$\begin{aligned}\cosh^2 u + \sinh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + 2 + e^{2v} + e^{-2v} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v}\right)\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de u et v dans cette dernière expression, on déduit que $\cosh^2 u + \sinh^2 v = \cosh^2 v + \sinh^2 u$. Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned}\cosh(u+v)\cosh(u-v) &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v} + e^{-u-v}\right) \times \left(e^{u-v} + e^{v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v+u-v} + e^{u+v+v-u} + e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{2v} + e^{-2v} + e^{-2u}\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé. De la même façon, et toujours pour deux réels u et v quelconques :

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + 2 - e^{2v} - e^{-2v} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v}\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\sinh(u+v)\sinh(u-v) &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v} - e^{-u-v}\right) \times \left(e^{u-v} - e^{v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v+u-v} - e^{u+v+v-u} - e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} - e^{2v} - e^{-2v} + e^{-2u}\right)\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$. De plus, on utilise la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= 1 + \sinh^2 u - (1 + \sinh^2 v) \\ &= \sinh^2 u - \sinh^2 v.\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure à la double égalité.

Exercice 13 : (Équation - Fonctions hyperboliques).

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x).$$

Solution:

1. On a

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} + e^{-(\ln 3)/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3^{1/2} + 3^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} - e^{-(\ln 3)/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3^{1/2} - 3^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3-1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

2. Notons $u = \frac{1}{2}\ln(3)$.
   Pour tous réels a et b, on a $\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sin h \cdot \sinh b$, donc, pour tout réel x, on a

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh u \cdot \cosh x + \sinh u \cdot \sinh x = \cosh(x+u).$$

   Résoudre l'équation proposée revient donc à chercher l'ensemble des réels x tels que $\cosh(u+x) = \cosh(5x)$.
   Or on sait que deux réels admettent le même cosinus hyperbolique s'ils sont égaux ou opposés.
   On a donc

$$\begin{aligned}\cosh(x+u) = \cosh(5x) &\iff x + u = 5x \text{ ou } x + u = -5x \\ &\iff 4x = u \text{ ou } -6x = u \\ &\iff x = \frac{u}{4} \text{ ou } x = -\frac{u}{6}\end{aligned}$$

L'ensemble des réels x vérifiant $\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x)$ est donc

$$\left\{\frac{\ln 3}{8}, -\frac{\ln 3}{12}\right\}.$$

Exercice 14 : (Limite - exp).

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend vers $+\infty$?

Solution:

1. Soit a un réel.
   Si a appartient à $]-1,1[$, alors (a^n) tend vers 0.
   Si $a = 1$, alors (a^n) est la suite constante égale à 1.
   Si $a > 1$, alors (a^n) diverge vers $+\infty$.
   Si $a \leq -1$, alors (a^n) diverge.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est bien définie lorsque a est positif. Sa limite est la même que la limite de la suite (a^n).

Exercice 15 : (Limites - Opérations). Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x\sin x + x^2}{1 + x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(2x+3)$
6. $f_6 : x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$
7. $f_7 : x \mapsto x + \cos x$
8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$
9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

Solution:

1. Pour tout x, $\dfrac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4} = \dfrac{x^5}{x^4}\,\dfrac{2 + x^{-3}}{1 + x^{-4}}$ donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4} = +\infty$.
2. Pour tout x, $\dfrac{x\sin x + x^2}{1 + x^2} = \dfrac{x^2}{x^2}\dfrac{1 + x^{-1}\sin x}{1 + x^{-2}}$ donc $\lim\limits_{\infty} f_2(x) = 1$.
3. Pour tout $x \geq 1$, $f_3(x)$ est bien définie et $\dfrac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x} = \dfrac{x^{3/2}}{x^2}\,\dfrac{1 + 5x^{-3/2}}{1 + x^{-2}\cos x}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f_5(x) = 0$.
4. Pour tout $x \geq 1$, $f_4(x)$ est bien définie. On applique multiplie et on re-divise par l'expression conjuguée (astuce classique pour « faire disparaître » une racine carrée d'une somme) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x + 1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f_4(x) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, on a $\ln(2x+3) = \ln(x) + \ln\dfrac{2x+3}{x}$.
   De plus, la limite en $+\infty$ de $x^{-1}\ln(x)$ est nulle, et celle de $\ln\dfrac{2x+3}{x}$ est égale à $\ln 2$.
   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_5(x) = 0$.

6. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, et lorsque u tend vers 0, $\sin u$ tend vers 0.

   Donc, par composition de limites, $\lim\limits_{+\infty} \sin \dfrac{1}{x} = 0$

7. Pour tout $x > 0$, $f_7(x) = x \times \left(1 + \dfrac{\cos x}{x}\right)$.

   La fonction cos étant bornée, le théorème des gendarmes permet de justifier que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$.

   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_7(x) = +\infty$.

   NB : on peut tout aussi bien minorer $f_7(x)$ par $x - 1$, et utiliser une comparaison de limites.

8. On commence par expliciter f_8 à l'aide de la fonction exponentielle : pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} f_8(x) &= e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x) \\ &= \frac{1}{8}e^{-x}\ \left(e^{3x} + 3e^{x} + 3e^{-x} + e^{-3x} - \left(e^{3x} - 3e^{x} + 3e^{-x} - e^{-3x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{8}e^{-x}\ \left(6e^{x} + 2e^{-3x}\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x} \end{aligned}$$

   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_8(x) = \dfrac{3}{4}$.

9. Pour tout réel x, $\cosh x$ est strictement positif, donc $f_9(x)$ est bien défini.

   Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} f_9(x) &= x - \ln(\cosh x) \\ &= x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= x - \ln \left(\frac{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)}{2}\right) \\ &= x - \ln(e^x) - \ln\left(1 + e^{-2x}\right) + \ln 2 \\ &= -\ln\left(1 + e^{-2x}\right) + \ln 2 \end{aligned}$$

   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_9(x) = \ln 2$.

Exercice 16 : (Fonction réciproque - Dérivée).

1. Montrer que pour tout y réel il existe un unique x réel tel que $y = \sinh(x)$, et exprimer x en fonction de y. sinh est donc une bijection $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note sa bijection réciproque argsinh.
2. Calculer la dérivée de argsinh.

Solution:

1. Soit y un réel. Déterminons x tel que $\sinh(x) = y$.

   On a

$$\begin{aligned} y = \sinh(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - 2y \times e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Il s'agit d'une équation de degré 2 en la variable $X = e^x$: il nous faut donc déterminer les racines positives de cette équation.

   Déterminons les racines de $X^2 - 2yX - 1 = 0$: il s'agit d'un trinôme en X, dont le discriminnt Δ est égal à $\Delta = 4y^2 + 4$ qui est toujours strictement positif.

   Les racines de ce trinôme sont donc

$$r_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Pour toute valeur de y on remarque que r_1 est négative et r_2 est positive.
En posant $x = \ln X$, on obtient l'antécédent de y par sinh :

$$\text{argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

2. La fonction argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout y réel on a :

$$\begin{aligned}
\text{argsinh}'(y) &= \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right) \times \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+y^2} + y}{\left(\sqrt{1+y^2} \times (y + \sqrt{1+y^2})\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.
\end{aligned}$$