

Feuille 1 : Nombres réels

Exercice 1 : (Automatismes - Inégalités). Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

- | | | |
|-----------------|---------------------|----------------------|
| 1. $7x + 9 > 0$ | 3. $10x - 1 \leq 5$ | 5. $11x + 9 \leq -4$ |
| 2. $-3x \geq 2$ | 4. $-7x - 2 > 0$ | 6. $-3x - 2 \geq 7$ |

Exercice 2 : (Inégalités) Résoudre les inéquations suivantes, pour tout x réel :

- | | | |
|-----------------|--------------|---------------|
| 1. $ x \leq 2$ | 2. $ x > 4$ | 3. $x^2 > 16$ |
|-----------------|--------------|---------------|

Exercice 3 : (Signe du trinôme). Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ | 3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ | 5. $-x^2 - 10x - 25 > 0$ |
| 2. $x^2 - 2x + 1 > 0$ | 4. $-x^2 + 5x + 14 > 0$ | 6. $-x^2 + 14x - 49 < 0$ |

Exercice 4 :

- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x + 2)^2 < -x$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

Exercice 5 :

- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\frac{-2}{6x+5} > 1$.
- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\frac{1}{x-2} < \frac{2}{3x+2}$.

Exercice 6 : Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2 - x| \leq 3 - x$.

Exercice 7 : (Inégalités). Vrai ? Faux ? Justifier !

- Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
- Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
- Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Exercice 8 : (Inéquations et équations).

- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ qui vérifient $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Exercice 9 : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Exercice 10 : Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

Exercice 11 : Pour x réel, on note $f(x) = |2 - |1 - x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f .

Exercice 12 : Expliciter trois réels a , b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x + 1|$.

Exercice 13 : 1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.

2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : (Moyennes). Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Exercice 15 : (Simplification d'intervalles) Simplifier les intervalles suivants.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $[1, 5] \cap [2, 6[;$ | 4. $] - \infty, 3] \cup [0, +\infty[;$ | 7. $[1, 2] \cap [5, 6[;$ |
| 2. $[1, 5] \cup [2, 6[;$ | 5. $[-2, 3] \cup \{3\};$ | 8. $[1, 2] \cup [5, 6[;$ |
| 3. $] - \infty, 3] \cap [0, +\infty[;$ | 6. $[-2, 3] \cap \{3\};$ | 9. $([-6, 8] \cup [4, 6]) \cap [7, 10[;$ |

Exercice 16 : (Intervalles). Soient $a \leq b$ et $c \leq d$ des réels, avec de plus $a \leq c$. On note $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$.

1. Montrer que $I \cap J$ est toujours un intervalle.
2. Sous quelle condition $I \cup J$ est-il un intervalle ?
3. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A \cap B$ soit un intervalle, sans que ni A , ni B ne soient un intervalle. Même question pour $A \cup B$.

Exercice 17 : (Majorant).

1. Rappeler la définition d'une partie A majorée de $\mathbb{R}$.
2. Quels sont les majorants de $[0, 1]$? De $[0, 1[$?
3. Donner un exemple de partie non majorée de $\mathbb{R}$.
4. On se donne deux parties majorées A et B de $\mathbb{R}$. Le majorant de $A \cup B$ est-il un majorant de A et de B ? Que peut-on dire d'un majorant de $A \cap B$?

Exercice 18 : (Maximum).

1. Rappeler la définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plusieurs maximums (distincts) ?
3. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admettant un maximum est majorée.
4. Écrire une assertion exprimant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
5. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, est-ce que $A \cap B$ et $A \cup B$ admettent des maximums ?

Exercice 19 : (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum). Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et s'ils admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et un minimum.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\};$ | 4. $D =]0, +\infty[;$ | 7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 2\right\};$ |
| 2. $B = [-1, 3];$ | 5. $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 4\};$ | 8. $H = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$ |
| 3. $C = [0, +\infty[;$ | 6. $F = \{n \in \mathbb{N}, 4 \leq 2^n \leq 1024\};$ | |