

Vrai ou Faux ? A propos du CM du 25/09

Algèbre 1
02/10/2026



Lyon 1

Vrai/Faux 1 : Fonction croissante

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante si

$$\exists (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

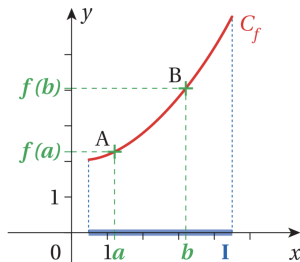
Vrai/Faux 1 : Fonction croissante

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante si

$$\exists (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

FAUX. Il faut que l'implication soit vraie POUR TOUS les couples $(a, b) \in I^2$:

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$



Vrai/Faux 2 : Fonction non-croissante

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle. On dit que f n'est pas croissante si :

$$\exists (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \quad \text{et} \quad f(a) > f(b).$$

Vrai/Faux 2 : Fonction non-croissante

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit que f n'est pas croissante si :

$$\exists (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \quad \text{et} \quad f(a) > f(b).$$

VRAI. Pour tout $(a, b) \in I^2$, en notant $P : "a \leq b"$ et $Q : "f(a) \leq f(b)"$, on sait que

$$f \text{ croissante} \iff \forall (a, b) \in I^2, \quad P \Rightarrow Q.$$

Donc on a, en passant à la négation, d'après les propriétés du cours :

$$\begin{aligned} f \text{ non-croissante} &\iff \text{non}(\forall (a, b) \in I^2, \quad P \Rightarrow Q) \\ &\iff \exists (a, b) \in I^2, \quad \text{non}(P \Rightarrow Q) \\ &\iff \exists (a, b) \in I^2, \quad P \text{ et } \text{non}(Q) \\ &\iff \exists (a, b) \in I^2, \quad \underbrace{a \leq b}_P \quad \text{et} \quad \underbrace{f(a) > f(b)}_{\text{non}(Q)}. \end{aligned}$$

Rappel : $\text{non}(P \Rightarrow Q) \iff \text{non}(\text{non}(P) \text{ ou } Q) \iff P \text{ et } \text{non}(Q).$

Vrai/Faux 3 : Implication

L'implication suivante est vraie : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 < 1 \implies x > -1$$

Vrai/Faux 3 : Implication

L'implication suivante est vraie : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 < 1 \implies x > -1$$

VRAI. Soit $x \in \mathbb{R}$, la contraposée de cette implication est

$$x \leq -1 \implies x^2 \geq 1.$$

Vrai/Faux 3 : Implication

L'implication suivante est vraie : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 < 1 \implies x > -1$$

VRAI. Soit $x \in \mathbb{R}$, la contraposée de cette implication est

$$x \leq -1 \implies x^2 \geq 1.$$

Cette contraposée est vraie car :

$$\begin{aligned} & x \leq -1 \\ \implies & x^2 \geq (-1)^2 = 1, \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Donc l'implication elle-même est vraie (car équivalente à l'implication).

Vrai/Faux 3 : Implication

L'implication suivante est vraie : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 < 1 \implies x > -1$$

VRAI. Soit $x \in \mathbb{R}$, la contraposée de cette implication est

$$x \leq -1 \implies x^2 \geq 1.$$

Cette contraposée est vraie car :

$$\begin{aligned} & x \leq -1 \\ \implies & x^2 \geq (-1)^2 = 1, \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Donc l'implication elle-même est vraie (car équivalente à l'implication).

Attention : ce n'est pas une équivalence ! La bonne équivalence est :
pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 < 1 \iff -1 < x < 1.$$