

Feuille 8 : Arithmétique – Bases, Nombres premiers, Équations diophantiennes

A. Exercices standards

Exercice 1 – Changement de base

- Donner la valeur en base dix des nombres suivants :
 - $(110101001)_2$;
 - $(110101001)_3$;
- Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.
 - 255 en base deux ;
 - 1907 en base seize ;

Exercice 2 – Équations diophantiennes

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
- On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Montrer que 87 et 31 sont premiers entre eux.
 - En déduire un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $87u + 31v = 1$, puis une solution (x_0, y_0) de (E) .
 - Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .
- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

(a) $1665x + 1035y = 45$

(b) $637x + 595y = 29$.

Exercice 3 – Congruences et divisibilité

- Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{1000} par 7.
- Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000} .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n + 19$ est divisible par 4 et $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Exercice 4 – Congruences et équations

- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x \equiv 5 [4]$.
- Trouver une solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $3x \equiv 1 [7]$, puis toutes les solutions de l'équation $3x \equiv 0 [7]$ et enfin l'ensemble des solutions de l'équation $3x \equiv 1 [7]$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 3 [11] \\ x \equiv 4 [15] \end{cases}$ de deux façons :
 - En utilisant le résultat du cours (et donc en cherchant une solution particulière).
 - En montrant préalablement que résoudre ce système est équivalent avec la résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne $11u - 15v = 1$.

Exercice 5 – Nombres premiers

- Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $a^2 - b^2$ est premier, alors a et b sont consécutifs.
La réciproque est-elle vraie ?
- Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\text{div}(p^n)$.
- Soit p un nombre premier, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p .

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Nombres premiers et raisonnement

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 7 – Nombres premiers

Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que n est de la forme $n = 2^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$.
Que penser de la conjecture : $2^{2^n} + 1$ est premier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 8 – Récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Reste d'une division

1. Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7 et par 11.
2. Déterminer deux entiers u et v tels que $7u + 11v = 1$.
3. En déduire le reste de la division de N par 77.

Exercice 10 – Congruence

Trouver **une** solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1 [11]$ puis **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 0 [11]$. En déduire **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1 [11]$.

Exercice 11 – Équations diophantiennes I

Trouver **une** solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 1$ puis **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 0$. En déduire **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 1$.

Exercice 12 – Équations diophantiennes II

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes

1. $3x - 5y = 13$
2. $212x + 45y = 3$
3. $42x + 45y = 4$
4. $7x + 5y = 3$