

Feuille 7 : Arithmétique – PGCD, PPCM, Divisibilité, Nombres premiers

A. Exercices standards

Exercice 1 – Vrai ou Faux

Etant donnés cinq nombres entiers consécutifs, on trouve toujours parmi eux :

- 1. Au moins deux multiples de 2 dont un multiple de 4.*
- 2. Au plus trois nombres pairs*
- 3. Au moins deux multiples de 3*
- 4. Exactement un multiple de 5.*
- 5. Au moins un multiple de 6.*
- 6. Au moins un nombre premier.*

Exercice 2 – Vrai ou Faux

Soient a, b et d trois entiers. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- 1. Si d divise a et b , alors d divise leur PGCD.*
- 2. S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$, alors d divise $\text{PGCD}(a, b)$.*
- 3. Si $\text{PGCD}(a, b)$ divise d , alors il existe un couple d'entiers (u, v) , tel que $au + bv = d$*

Exercice 3 – Calcul de PGCD entre deux entiers

- 1. Calculer le PGCD de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.*
- 2. Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 18480 et 9828. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.*

Exercice 4 – Utilisation du PGCD et du PPCM

- 1. Déterminer les couples d'entiers naturels premiers entre eux dont le produit est 6.*
- 2. Déterminer les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 35 et le PPCM est 210.*
- 3. Déterminer les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 18 et le produit est 6480.*

Exercice 5 – Divisibilité et nombre premier

Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

- 1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;*
- 2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow p$ premier .*

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Division euclidienne Pour m entier naturel, à quoi peut être égal le reste de la division euclidienne de m par 4 ? En déduire que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 7 – Divisibilité

Quel est le plus petit entier naturel, qui, divisé par 8, 15, 18 et 24 donne pour restes respectifs 7, 14, 17 et 23 ?

Exercice 8 – PGCD

Soit n un entier relatif. On pose $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.

1. Calculer $5a - 2b$. En déduire le PGCD de a et b en fonction de n .
2. Procéder de même pour exprimer en fonction de n le PGCD de $2n - 1$ et $9n + 4$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Entiers premiers entre eux

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab .

Exercice 10 – PGCD

Déterminer les couples d'entiers naturels de PGCD 18 et de somme 360.

Exercice 11 – PGCD et Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $0 < a < b$.

1. Démontrer que si a divise b alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^a - 1$ divise $n^b - 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le reste de la division euclidienne de $n^b - 1$ par $n^a - 1$ est $n^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de b par a .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le PGCD de $n^b - 1$ et $n^a - 1$ est $n^d - 1$ où d est le PGCD de a et b .

Exercice 12 – Divisibilité et nombres premiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que si n n'est divisible par aucun entier m vérifiant $2 \leq m \leq \sqrt{n}$, alors n est premier.
2. Démontrer que les nombres $n! + 2$, $n! + 3$, $\dots$, $n! + n$ ne sont pas premiers.
3. En déduire que pour tout n , il existe n entiers consécutifs non premiers.