Feuille 6 : Applications
Éléments de correction – Parties A, B et C

A. Exercices standards

Exercice 1 - Applications et quantificateurs

1. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$ (il existe un élément x de I tel que f s'annule en x)
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0$ (quelque soit l'élément x de I, f s'annule en x)
3. $\exists (x_1, x_2) \in I^2,\ f(x_1) \neq f(x_2)$ (il existe des éléments x_1 et x_2 qui n'ont pas la même image par f)
4. $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (les images de deux éléments différents de I sont toujours différentes - on remarque que la contraposée de cette implication est $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, et on retrouve la définition de "f injective")
5. $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (si deux éléments de I annulent la fonction f, alors ces deux éléments sont nécessairement identiques)

Exercice 2 - Exemples d'images directes et réciproques d'ensembles

1. (a) $f(\{1\}) = \{4\}$, $f(\{1,3\}) = \{2,4\}$, $f(\{3,4\}) = \{2\}$ et $f(\emptyset) = \emptyset$. (l'image d'un ensemble A par f est l'ensemble $f(A)$ contenant toutes les images des éléments de A !)
   (b) $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}$, $f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}$, $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$. (les images réciproque d'un ensemble B est l'ensemble $f^{-1}(B)$ contenant tous les antécédents des éléments de B)
2. $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$, donc $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.
   $f^{-1}([1,2]) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$. Or on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq x^2 \leq 2 \iff 1 \leq x^2$ et $x^2 \leq 2 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \iff x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$. (on peut aussi faire un graphique rapide et trouver les antécédents des images de f étant entre 1 et 2)

Exercice 3 - Images directes/réciproques et cercles

1. Soit $(x, y) \in C$, alors $x^2 + y^2 = 4$, c'est-à-dire $x^2 = 4 - y^2$ et donc, comme $4 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{2x^2 + 4y^2}{4 + y^2} = \frac{2(4 - y^2) + 4y^2}{4 + y^2} = \frac{8 + 2y^2}{4 + y^2} = \frac{2(4 + y^2)}{4 + y^2} = 2.$$

   Ainsi, $f(C) = \{2\}$.
2. Soit $(u, v) \in B$, alors $(x, y) \in g^{-1}(u, v) \iff g(x, y) = (u, v) \iff (x + y, xy) = (u, v) \iff (x + y, xy) = \left(u, \frac{u^2 - 1}{2}\right)$. On a donc

$$1 = u^2 - 2v = u^2 - 2\left(\frac{u^2 - 1}{2}\right) = (x + y)^2 - 2xy,$$

   c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 1$. On en déduit donc que $g^{-1}(B) \subset D$ où D est le centre de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Réciproquement, soit $(x, y) \in D$, alors

$$g(x, y) = (x + y, xy) = (u, v)$$

   et on a $u^2 - 2v = (x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 = 1$ donc $(u, v) \in B$ et donc $D \subset g^{-1}(B)$. Finalement, on a bien montré que $g^{-1}(B) = D$.
3. Soit $(x, y) \in P$, alors

$$h(x, y) = h(x, x^2) = \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \frac{2x}{1 + x^2}\right) = (u, v).$$

On a donc

$$u^2+v^2=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2=\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^4+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}=1$$

et donc (u,v) appartient au centre centré en $(0,0)$ et de rayon 1, donc $h(P)$ est inclus dans ce cercle. De plus, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $h(x,y)=(1,0)$, alors on a

$$\frac{1-y}{1+x^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{2x}{1+x^2}=0.$$

Comme $1+x^2\neq 0$, la deuxième équation est équivalente à $2x=0$ donc $x=0$. En remplaçant x par 0 dans la première équation, on trouve $1-y=1$ donc $y=0$. Ainsi $h^{-1}(\{(1,0)\})=\{(0,0)\}$.

Exercice 4 - Injectivité, surjectivité et bijectivité

1. Soient $(x,x')\in\mathbb{R}_+^2$, alors on a $x^2=x'^2\Rightarrow\sqrt{x^2}=\sqrt{x'^2}\Rightarrow|x|=|x'|\Rightarrow x=x'$ car x et x' sont positifs. On en déduit donc que f est injective.
   Comme $-1\in\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent par f puisque, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $x^2=-1$ n'a pas de solution, alors f n'est pas surjective, donc n'est pas bijective.
2. Soient $(x,x')\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, alors on a $\frac{1}{x}=\frac{1}{x'}\Rightarrow x=x'$ donc f est injective.
   Le réel 0 n'a pas d'antécédent par f car l'équation $\frac{1}{x}=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas surjective, donc n'est pas bijective.
3. Puisque $f(2)=f(3)=1$ et que $2\geq 3$, f n'est pas injective, donc n'est pas bijective.
   Soit $y\in\{1\}$, alors $y=1$ et $f(2)=1$ (ou $f(3)=1$) donc f est surjective.
4. Soit $(n,n')\in\mathbb{N}^2$, alors $f(n)=f(n')\Rightarrow n+1=n'+1\Rightarrow n=n$" donc f est injective.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $n+1=0\iff n=-1\notin\mathbb{N}$ donc 0 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{N}$, donc f n'est pas surjective, donc n'est pas bijective.
5. Comme $f(-2)=f(2)=4-1=3$ et que $2\neq -2$, alors f n'est pas injective, donc n'est pas bijective.
   Soit $y\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ et $n\in\mathbb{Z}$ tels que $y=n^2-1$, alors $n=\pm\sqrt{y+1}$ mais ces nombres ne sont pas forcément entiers, par exemple pour $y=1$. Donc f n'est pas surjective.
6. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(s+y,s-t)=(x,y)$. On a donc le système

$$\left\{\begin{array}{l} s+t=x \\ s-t=y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} s+t=x \\ 2s=x+y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=x-s \\ s=\dfrac{x+y}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=x-\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{2} \\ s=\dfrac{x+y}{2} \end{array}\right. .$$

   On a donc montré que $f(s,t)=(x,y)\iff(s,t)=\left(s=\frac{x+y}{2},t=\frac{x-y}{2}\right)$ donc f est bijective de bijection réciproque $f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)$, donc évidemment f est injective et surjective.
7. Comme $f(1,2)=f(2,1)=2\times 1=2$ et que $(1,2)\neq(2,1)$ et sont tous les deux dans $\mathbb{N}^2$, on en déduit que f n'est pas injective, donc n'est pas bijective.
   Soit $y\in\mathbb{N}$, alors $y=y\times 1=f(y,1)$ avec $(1,y)\in\mathbb{N}^2$, do,c f est surjective.
8. Soit $(k,k')\in\mathbb{N}^2$, alors $f(k)=f(k')\Rightarrow k=k'$ et $(k+1)^2=(k'+1)^2\Rightarrow k=k'$ et $|k+1|=|k'+1|\Rightarrow k+1=k'+1\Rightarrow k=k'$ car $k\geq 0$ et $k'\geq 0$. Donc f est injective.
   Considérons le point $(0,0)\in\mathbb{N}^2$, alors soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $f(k)=(0,0)$. On a donc $(k,(k+1)^2)=(0,0)$ et donc $k=0$ et $(k+1)^2=0$. Cette deuxième équation donne $k+1=0$ et donc $k=-1\neq 0$ donc $(0,0)$ n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective, donc n'est pas bijective.

Exercice 5 - Composition et injectivité, bijectivité, surjectivité

1. Supposons que f et g sont injectives, montrons que $g\circ f$ est injective. Soient $x,x'\in E$ tels que $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')$. Cela se réécrit $g(f(x))=g(f(x'))$. Comme g est injective, on en déduit $f(x)=f(x')$. Puis, comme f est injective, on en déduit $x=x'$. Donc $g\circ f$ est injective.
2. Supposons que f et g sont surjectives, montrons que $g\circ f$ est surjective. Soit $z\in G$, comme g est surjective, il existe $y\in F$ tel que $z=g(y)$. Ensuite, comme f est surjective, il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. On a donc $z=(g\circ f)(x)$, $g\circ f$ est surjective.

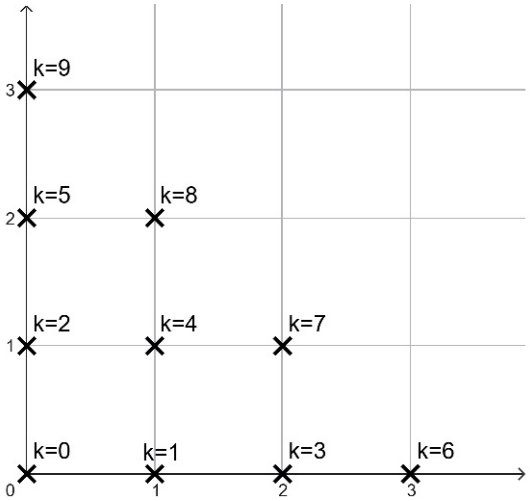
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est injective d'après la question 1 et surjective d'après la question 2. Donc $g \circ f$ est bijective.
4. Supposons que $g \circ f$ est injective, montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en appliquant g, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme $g \circ f$ est injective et $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, on en déduit que $x = x'$. Donc f est injective.
5. Supposons que $g \circ f$ est surjective, montrons que g est surjective. Soit $z \in G$, comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. On pose $y = f(x)$, on a $g(y) = g(f(x)) = z$. Donc y est un antécédent de z par g, g est surjective.
6. (a) $g \circ f$ est bijective, donc f est injective d'après la question 4 et g est surjective d'après la question 5.
   (b) $f \circ g$ est bijective, donc g est injective d'après la question 4 et f est surjective d'après la question 5.
   (c) Dans ce cas $E = F$. Comme $f \circ f$ est bijective, on en déduit que f est injective et surjective et donc que f est bijective.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

1. Calculons les premières valeurs de $f(k)$:

- $0 = \dfrac{0(0+1)}{2} + 0$ donc $f(0) = (0-0, 0) = (0, 0)$.
- $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} + 0$ donc $f(1) = (1-0, 0) = (1, 0)$.
- $2 = \dfrac{1(1+1)}{2} + 1$ donc $f(2) = (1-1, 1) = (0, 1)$.
- $3 = \dfrac{2(2+1)}{2} + 0$ donc $f(3) = (2-0, 0) = (2, 0)$.
- $4 = \dfrac{2(2+1)}{2} + 1$ donc $f(4) = (2-1, 1) = (1, 1)$.
- $5 = \dfrac{2(2+1)}{2} + 2$ donc $f(5) = (2-2, 2) = (0, 2)$.
- $6 = \dfrac{3(3+1)}{2} + 0$ donc $f(6) = (3-0, 0) = (3, 0)$...



2. ⋆ Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(n) = f(n')$. Ainsi, il existe un unique couple d'entiers naturels (m, j) tels que $n = \dfrac{m(m+1)}{2} + j$ et un unique couple d'entiers naturels (m', j') tels que $n' = \dfrac{m'(m'+1)}{2} + j'$.
$\begin{cases} m - j = m' - j' \\ j = j' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = m' \\ j = j' \end{cases}$. Par unicité du couple (m, j), $n = n'$: f est injective.
⋆ Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = (p, q)$. Ainsi :
$\begin{cases} m - j = p \\ j = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p + q \\ j = q \end{cases}$. Donc $n = \dfrac{(p+q)(p+q-1)}{2} + q$.
Donc tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ admet au moins un antécédent par f : f est surjective.
⋆ Conclusion : f est bijective.

Exercice 7 – Images directes et réciproques d'ensembles (plus abstrait)

1. On suppose que $I \subset J$. Soit $x \in f^{-1}(I)$, alors $f(x) \in I$. Comme $I \subset J$, on a $f(x) \in J$, donc $x \in f^{-1}(J)$. On a donc bien montré que $f^{-1}(I) \subset f^{-1}(J)$.
   La réciproque est fausse. Reprenons l'exercice 2 : $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{3, 4\}$.
   Or, $\emptyset \subset \{3, 4\}$ mais $\{3\} \not\subset \{2\}$.
2. Soit $A \subset E$ et $x \in A$. Alors, $f(x) \in f(A)$ et par définition, $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $y \in f(f^{-1}(I))$. Alors, il existe $x \in f^{-1}(I)$ tel que $y = f(x)$.
   Or, comme $x \in f^{-1}(I)$, alors $f(x) \in I$ d'où $y \in I$. Donc $f(f^{-1}(I)) \subset I$.
3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est injective.
   $\subseteq$ Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$. (Exercice 3 - 4. b) : injectivité non nécessaire)

$\supseteq$ Soit $x \in f^{-1}(f(A))$ alors par définition, $f(x) \in f(A)$. Donc, $\exists y \in A$ tel que $f(y) = f(x)$. Comme f est injective, $x = y$ donc $x \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Conclusion : $A = f^{-1}(f(A))$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$. Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$. Prenons $A = \{x\}$. Alors, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ et comme $f(x) = f(y)$, alors $y \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ soit $y = x$. Donc f est injective.

4. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est surjective.
$\subseteq$ Tout élément de $f(f^{-1}(B))$ est de la forme $f(x)$ avec x tel que $f(x) \in B$ donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
$\supseteq$ Pour tout $y \in B \subset F$, comme f est surjective, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Alors $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Donc $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Conclusion : $f(f^{-1}(B)) = B$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
En particulier, prenons $B = F$. Alors, par hypothèse, $f(f^{-1}(F)) = F$.
Or, $f^{-1}(F) = E$ (pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F$) d'où $f(E) = F$: donc f est surjective.
5. $f : E \to E$ et $f(f(E)) = E$. Soit $x \in E$, $y \in E$ tels que $f(x) = y$. Or, $f(x) \in f(E)$ donc $y \in f(E)$. Comme $y \in E = f(f(E))$, on a donc $f(f(E) \subset f(E)$.
Mais, par définition, $f(E) \subset f(f(E))$ donc $f(f(E)) = f(E)$ soit $E = f(E)$: donc f est surjective.

Exercice 8 – Application sur $\mathcal{P}(E)$

Supposons que f est injective et montrons que $A \cup B = E$. En effet, on a :

$$f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$$
$$f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B),$$

et donc $f(A \cup B) = f(E)$. Par injectivité de f, on en déduit que $A \cup B = E$.
Réciproquement, supposons que $A \cup B = E$ et montrons que f est injective. Soit $X, X' \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(X')$, alors on a $X \cap A = X' \cap A$ et $X \cap B = X' \cap B$ et donc

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X' \cap (A \cup B) = X' \cap E = X'.$$

Ainsi, f est injective et on a bien montré l'équivalence recherchée.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Exemples d'images directes et réciproques

1. $\{0\}$,
2. $\emptyset$,
3. $]0, e^2]$,
4. $]-\infty, 1]$,
5. $\mathbb{R}$,
6. $[e^3, +\infty[$,
7. $[-1, 1]$,
8. $[-1/2, 1]$,
9. $[0, 1]$,
10. $[0, \pi/2]$,
11. $[7/2\pi, 9/2\pi] \cup [11/2\pi, 13/2\pi]$,
12. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n - 1/2)\pi, (2n + 1/2)\pi]$.

Exercice 10 – Injectivité, surjectivité, bijectivité

1. L'application n'a qu'une seule image : $f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. Comme l'ensemble d'arrivée est $\{1/2\}$, il est clair que cette application est bijective. Sa bijection réciproque est $f^{-1} : \{1/2\} \to \{1\}$, $1/2 \mapsto 1$.
2. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $f(s, t) = (u, v)$. Celle-ci est équivalente à

$$\begin{cases} u = 3s + t \\ v = s - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} u = 3(v + 2t) + t \\ s = v + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{u - 3v}{7} \\ s = v + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{u - 3v}{7} \\ s = v + \dfrac{2}{7}(u - 3v) = \dfrac{v + 2u}{7}. \end{cases}$$

   La solution $\left(\dfrac{v + 2u}{7}, \dfrac{u - 3v}{7}\right)$ est unique, donc l'application est bijective.
   Sa bijection réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto \left(\dfrac{v + 2u}{7}, \dfrac{u - 3v}{7}\right)$.
3. L'application n'est pas injective car $f(0) = f(2\pi) = 0$, par périodicité du sinus, et $0 \neq 2\pi$. L'application est surjective car, pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation $-\sin(x) = y$, c'est-à-dire $\sin(x) = -y$ admet une infinité de solutions, en particulier $\arcsin(-y)$ car $-y \in [-1, 1]$. Ainsi, f n'est pas bijective.

Exercice 11 – Composition

1. Comme f n'est pas surjective, $f \circ g$ ne peut être surjective. En particulier, $f \circ g$ ne peut être bijective, donc une telle g n'existe pas.
2. Il existe une telle application h ; en effet, il suffit de prendre une application h vérifiant $h(n) = \sqrt{n}$ s'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m^2$.