

Feuille 5 : Ensembles

A. Exercices standards

Exercice 1 – Vocabulaire et parties de $\mathbb{R}$

On note

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : n^2 \leq 10\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3\}, \quad C = [1, 3], \quad D = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \in [4, 14]\}$$

$$E =]-\infty, 3], \quad F =]-2, 7], \quad G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -6 \text{ et } x^2 + 12x + 35 > 0\}.$$

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger-les si nécessaire.

a) $1 \in A$	b) $B \not\subset \mathbb{Z}$	c) $\{2\} \in C$	d) $D \subset \mathbb{N}$
e) $B \subset \mathbb{Q}^*$	f) $F \in G$	g) $E \subset \mathbb{R}$	h) $\sqrt{\pi} \in F$
2. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $C \cap D$, $C \cup D$, $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $\mathbb{R} \setminus E$, B^c , $C \setminus B$.
3. Déterminer $A \times B$, $C \times D$ et $A \times F$, et les représenter.

Exercice 2 – Inclusions d'ensembles

Montrer sur un dessin (pour 1. et 2.), puis à l'aide d'une preuve, les assertions suivantes :

1. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ ou } x \geq -1\} \not\subset [-2, 2]$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \text{ et } x \geq 0\} \subset (\mathbb{R}_+)^2$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in \mathbb{R}, x = 2t \text{ et } y = t^2 + 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.
4. $\{(t^3 - 3t^2, 3t - 1) : t \in \mathbb{R}, t \geq 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.
5. $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \subset [-a, a] \times [-b, b]$.

Exercice 3 – Inclusions, égalités, intersections et unions d'ensembles

On considère les ensembles E , F et G définis par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - xy - y^2 = 0\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}.$$

1. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.
2. Montrer que $F \cup G = E$ et tracer E .
3. Déterminer $F \cap G$ graphiquement et par un calcul.

Exercice 4 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles. Montrer les assertions suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$;
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$;
3. $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.

Exercice 5 – Parties d'un ensemble

Soient E et F deux ensembles.

1. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer $\mathcal{P}(E)$.
2. Les ensembles $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cap F)$ sont-ils égaux ?
3. Même questions pour les ensembles $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cup F)$.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas

On se propose ici de montrer qu'il n'existe aucun ensemble E tel que $\mathcal{P}(E) \subset E$. Par l'absurde, on suppose qu'un tel ensemble existe.

1. Expliquer en quoi consiste alors l'ensemble $A = \{x \in E : x \notin x\}$.
2. Justifier l'équivalence $A \in A \iff A \notin A$.
3. En déduire que E n'existe pas.
4. Montrer en quoi ce résultat assure que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Exercice 7 – Produit cartésien

1. Soient E et F deux ensembles, $\{A, C\} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\{B, D\} \subset \mathcal{P}(F)$. Montrer que l'on a

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

2. Montrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux ensembles.

Exercice 8 – Différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E , on note $A \Delta B$ la différence symétrique de A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Faire un diagramme de Venn pour illustrer ce que représente cet ensemble.
2. Si $A = [0, 3]$ et $B = [2, 3[$, déterminer $A \Delta B$.
3. Soient A et B des parties de E . Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta A^c$.
4. Montrer que, pour toutes parties A, B de E , $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
5. Montrer que, pour toutes parties A, B et C de E , $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Vocabulaire et intervalles

On considère les ensembles

$$E = \{-1, 2, 6\}, \quad F = [-3, 1] \quad \text{et} \quad G =]-2, +\infty[.$$

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger-les si nécessaire.
a) $1 \in F$ b) $\{0\} \in G$ c) $E \subset G$ d) $F \in \mathbb{R}$
2. Déterminer $E \cap F$, $F \cap G$, $F \cup G$, $G \setminus F$, $G \setminus E$, $\mathbb{R} \setminus G$, $\mathbb{Q} \cap E$ et $\mathbb{N} \cap E$.
3. Déterminer $E \times F$ et $F \times G$, et les représenter.

Exercice 10 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E .

1. On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
2. Montrer que $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ et $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.

Exercice 11 – Parties d'un ensemble

Soit $E = \{0, 1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $E \times E$ et $\mathcal{P}(E \times E)$.

Exercice 12 – Inclusion d'ensembles

1. Montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\}$.
2. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3x + 5 \text{ et } x \geq 0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$.
3. Montrer que $\{(t, 6t - 9) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y\}$.