

Feuille 5 : Ensembles Éléments de correction – Parties B et C

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Ensemble de tous les ensembles

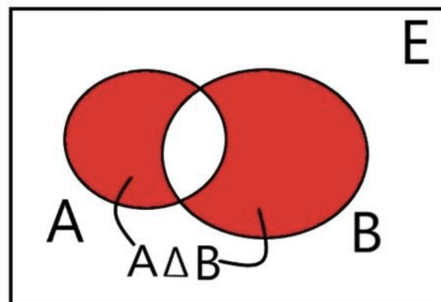
1. A est l'ensemble de tous les éléments de E , qui n'appartiennent pas à eux-mêmes.
2. $\Rightarrow$ Supposons que $A \in A$. Par définition de A , $A \in E$ et $A \notin A$.
 $\Leftarrow$ Supposons que $A \notin A$. Comme on a supposé que $\mathcal{P}(E) \subset E$, tous les sous-ensembles de E sont dans E . Donc $A \subset E$ et $A \in E$. Par définition de A , on a donc $A \in A$.
Conclusion : $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$.
3. L'ensemble A conduit à $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse faite est donc fausse : $\mathcal{P}(E) \not\subset E$.
4. S'il existait un ensemble E de tous les ensembles, alors $\mathcal{P}(E) \subset E$. Or, on vient de démontrer que ce n'était pas possible. Il n'existe donc pas d'ensemble de tous les ensembles.

Exercice 7 – Produit cartésien

1. $\square$ Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Alors $(x, y) \in (A \times B)$ et $(x, y) \in (C \times D)$. D'où $x \in A$, $y \in B$, $x \in C$, $y \in D$ soit $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. Donc $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Donc : $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$
 $\square$ Soit $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Alors $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$ donc $x \in A$ et $x \in C$, $y \in B$ et $y \in D$ soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.
Donc : $(A \cap C) \times (B \cap D) \subset (A \times B) \cap (C \times D)$
Conclusion : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
2. Remarquons que D est le disque de centre $(0, 0)$ de rayon 1.
 Supposons qu'il existe A et B des parties de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$.
 Par exemples, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in D$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$. Ainsi, $\frac{\sqrt{3}}{2} \in A$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \in B$ d'où $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in A \times B$.
 Mais $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} > 1$ donc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \notin D$: absurde !
Conclusion : D ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux ensembles.

Exercice 8 – Différence symétrique

1. Voici le diagramme de Venn correspondant.



2. On a $A \Delta B = [0, 3] \setminus [2, 3[= [0, 2[$.
3. On détermine les ensembles suivants :
 - $A \Delta A = A \setminus A = \emptyset$, puisque $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
 - $A \Delta \emptyset = A \setminus \emptyset = A$, puisque $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.

- $A \Delta E = E \setminus A = A^c$, puisque $A \cup E = E$ et $A \cap E = A$.
- $A \Delta A^c = E \setminus \emptyset = E$, puisque $A \cup A^c = E$ et $A \cap A^c = \emptyset$.

4. On a

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
 &= (A \cup (B \cap A^c)) \cap (B^c \cup (B \cap A^c)) \\
 &= ((A \cup B) \cap (A \cup A^c)) \cap ((B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c)) \\
 &= ((A \cup B) \cap E) \cap (E \cap (A^c \cup B^c)) \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
 &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\
 &= A \Delta B.
 \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
 (A \Delta B) \cap C &= [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap C \\
 &= [(A \setminus B) \cap C] \cup [(B \setminus A) \cap C] \\
 &= [(A \cap C) \setminus (B \cap C)] \cup [(B \cap C) \setminus (A \cap C)] \\
 &= (A \cap C) \Delta (B \cap C)
 \end{aligned}$$

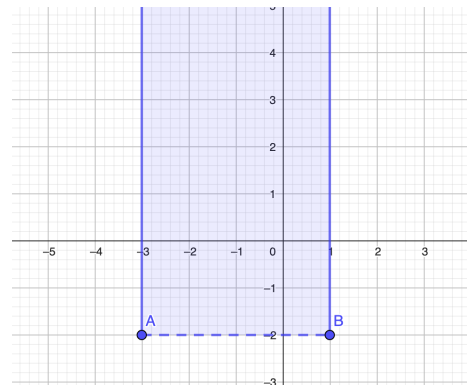
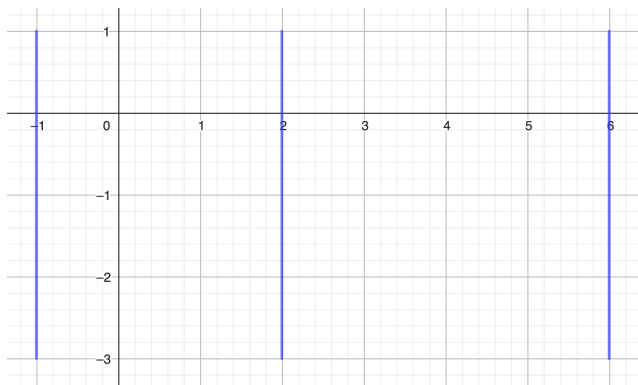
C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Vocabulaire et intervalles

- Vrai.
 - Faux. Il faut écrire $0 \in G$ ou $\{0\} \subset G$.
 - Vrai.
 - Faux. Il faut écrire $F \subset \mathbb{R}$.

2. On a

- $E \cap F = \{-1\}$,
- $F \cap G =]-2, 1]$,
- $F \cup G = [-3, +\infty[$,
- $G \setminus F = G \cap F^c =]1, +\infty[$,
- $G \setminus E =]-2, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, 6[\cup]6, +\infty[$,
- $\mathbb{R} \setminus G = G^c =]-\infty, -2]$,
- $\mathbb{Q} \cap E = E$ car $E \subset \mathbb{Q}$,
- $\mathbb{N} \cap E = \{2, 6\}$.
- Voici les représentations graphiques de $E \times F$ (à gauche) et $F \times G$ (à droite)



Exercice 10 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

1. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$. Comme $A \cup B \subset A \cup C$, alors $x \in A \cup C$. On a deux cas :
 - soit $x \in C$, alors on a donc montré que $B \subset C$,
 - soit $x \in A$, alors $x \in A \cap B$, et comme $A \cap B \subset A \cap C$, on a $x \in A \cap C$, donc $x \in C$ et on a montré que $B \subset C$.
2. On a $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap C^c \cap B \cap C^c = (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \setminus C$.
On a aussi $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A \cup B) \cap C^c = (A \cup B) \setminus C$.

Exercice 11 – Parties d'un ensemble

- $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ (il contient $2^{\text{Card}(E)} = 2^2 = 4$ parties).
- $E \times E = \{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$ (il contient $\text{Card}(E)^2 = 2^2 = 4$ parties).
- $\mathcal{P}(E \times E)$ est constitué de :
 - l'ensemble vide $\emptyset$ (1 partie),
 - toutes les parties à 1 éléments, $\{(0, 0)\}, \{(1, 1)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 0)\}$ (il y a $\binom{4}{1} = 4$ parties),
 - toutes les parties à 2 éléments, $\{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(1, 1), (0, 1)\}, \{(1, 1), (1, 0)\}, \{(1, 0), (0, 1)\}$ (il y a $\binom{4}{2} = 6$ parties),
 - toutes les parties à 3 éléments, $\{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\}, \{(1, 1), (0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 0), (1, 1), (1, 0)\}$ (il y a $\binom{4}{3} = 4$ parties),
 - la partie à 4 éléments, $\{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$ (il y a $\binom{4}{4} = 1$ parties).

Exercice 12 – Inclusions d'ensembles

1. Comme $0 \in \mathbb{Z}$, mais que $0 \notin \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\}$ puisque $|0| \leq 1$, on a bien $\mathbb{Z} \not\subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\}$.
2. Soit $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3x + 5 \text{ et } x \geq 0\}$, alors $y \geq x + 2x + 5 \geq x$ car $2x \geq 0$ et $5 \geq 0$, donc $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$, d'où l'inclusion demandée.
3. Soit $(x, y) \in \{(t, 6t - 9) : t \in \mathbb{R}\}$, alors $x^2 - y = t^2 - (6t - 9) = t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2 \geq 0$, donc $x^2 \geq y$, d'où l'inclusion demandée.