

Feuille 4 : Types de raisonnements Éléments de correction – Parties B et C

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Différents types de raisonnements

1.
 - Si $0 \leq a \leq b$, alors $\frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2}$ soit $\frac{a+b}{2} \leq b$. De même, $\frac{a+b}{2} \geq \frac{a+a}{2}$ soit $\frac{a+b}{2} \geq a$.
Donc $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$.
 - Si $0 \leq a \leq b$, alors $0 \leq a^2 \leq ab$ ($a \geq 0$) soit $a \leq \sqrt{ab}$ ($a \geq 0$).
De même, $0 \leq ab \leq b^2$ ($b \geq 0$) soit $\sqrt{ab} \leq b$ ($b \geq 0$). Donc $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par disjonction de cas :
 - Si n est pair : alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et donc $n(n+1) = 2k(n+1)$: comme $k(n+1) \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2.
 - Si n est impair : alors $n+1$ est pair et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$ et donc $n(n+1) = 2kn$: comme $kn \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2.
 Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2.
3. Soit a et b entiers relatifs tels que $b \neq 0$.
Supposons que $(a+b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q} : \exists (p, q) \in \mathbb{Z}$, avec $q \neq 0$, $a+b\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Comme $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = \frac{p-aq}{bq}$.
Or, $(p-aq) \in \mathbb{Z}$ et $(bq) \in \mathbb{Z}^*$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: absurde ! Donc $(a+b\sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sqrt{n^2+1}$ est un entier : $\exists k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1} = k$ soit $n^2+1 = k^2 \Leftrightarrow 1 = (k-1)(k+1)$. Ainsi, on a : $\begin{cases} k-n=1 \\ k+n=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} k-n=-1 \\ k+n=-1 \end{cases}$ soit
 $\begin{cases} 2k=2 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2n=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2k=-2 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2n=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$
 Or, dans les deux cas, $n=0$ ce qui est impossible car $n \in \mathbb{N}$. Absurde !
 Donc $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
5. Pour $x = -3$, $x < 2$ mais $x^2 \geq 4$: la propriété est donc fausse.
6. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \geq 1$, $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$.
Initialisation : Pour $n = 1$: $(1+x)^1 = 1+x$ et $1+1 \times x = 1+x$.
 Donc $(1+x)^1 \geq 1+1 \times x$ et $P(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, $P(k)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie :
 Par hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geq 1+nx$ d'où $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$ (car $1+x > 0$).
 Ainsi, $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$ soit $(1+x)^{n+1} \geq 1+x(n+1)+nx^2$.
 Or, comme $x^2 \geq 0$ et $n \geq 1$, $1+x(n+1)+nx^2 \geq 1+x(n+1)$ d'où $(1+x)^{n+1} \geq 1+x(n+1)$
 Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$
 $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 7 – Disjonction de cas et raisonnement non-constructif

1. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, alors on peut choisir $a = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.
2. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, posons $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ et $b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Alors $a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$: donc $a^b \in \mathbb{Q}$.
3. Dans les deux cas, on a trouvé $a \notin \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 8 – Somme d'irrationnels

1. La contraposée de la proposition P est : "Si a et b sont rationnels, alors $a + b$ est rationnel".

Supposons a et b rationnels. Alors, il existe des entiers relatifs $m, n \neq 0, p, q \neq 0$

tels que : $a = \frac{m}{n}$ et $b = \frac{p}{q}$. D'où :

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \\ &= \frac{mq + pn}{nq} \end{aligned}$$

Comme $(mq + pn) \in \mathbb{Z}$ et $(nq) \in \mathbb{Z}^*$, alors $(a + b) \in \mathbb{Q}$.

2. La réciproque de la proposition P est : "Si a ou b sont irrationnels, alors $a + b$ est irrationnel".

Contre-exemple : Prenons $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$. Alors $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais $(a + b) \in \mathbb{Q}$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Raisonnement par récurrence

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la propriété $P(n) : u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$.

Initialisation : Pour $n = 2$, on a $u_2 = 3$ et $\frac{2^n + 2}{2^n - 2} = \frac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \frac{6}{2} = 3$. Donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 2$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie. On a :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{3\left(\frac{2^n + 2}{2^n - 2}\right) + 1}{\left(\frac{2^n + 2}{2^n - 2}\right) + 3} = \frac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3(2^n - 2)} = \frac{4 \cdot 2^n + 4}{4 \cdot 2^n - 4} = \frac{2 \cdot 2^n + 2}{2 \cdot 2^n - 2} = \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2},$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 10 – Récurrence et initialisation

Pour tout nombre entier naturel n , on définit la propriété $P(n) : "2^n > n^2"$.

1. Soit $n \geq 3$ un entier. Supposons que $P(n)$ soit vraie, alors on a

$$2^n > n^2 \implies 2 \cdot 2^n > 2n^2 \implies 2^{n+1} > 2n^2 > (n + 1)^2$$

car $2n^2 - (n + 1)^2 = (n\sqrt{2} + n + 1)(n\sqrt{2} - n - 1) = (n(\sqrt{2} + 1) + 1)(n(\sqrt{2} - 1) - 1)$. Comme, pour tout $n \geq 3$

- $n(\sqrt{2} + 1) + 1 > 0$,

- comme $\sqrt{2} - 1 > 0$, $n(\sqrt{2} - 1) - 1 \geq 3(\sqrt{2} - 1) - 1 > 0$ car $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1 < 3$,

puisque $\sqrt{2} < 2$.

Ainsi, $P(n + 1)$ est vraie.

2. Il suffit de chercher la plus petite valeur $n_0 \geq 3$ possible pour laquelle la propriété est vraie. La propriété sera donc initialisée et héréditaire d'après la question 1., donc vraie pour tout $n_0 \geq 3$ par récurrence.

On a $2^3 - 3^2 = 8 - 9 < 0$, $2^4 - 4^2 = 0$ et finalement $2^5 - 5^2 = 32 - 25 = 7 > 0$.

Ainsi, la propriété est vraie pour tout $n \geq 5$.

Exercice 11 – Raisonnements par l'absurde

Soit $n > 0$ tel que n soit le carré d'un entier. Raisonnons par l'absurde et supposons que $2n$ est aussi le carré d'un entier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p^2$ et $2n = q^2$. On en déduit donc que $2 = \frac{q^2}{p^2}$ et

donc que $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Ainsi, si n est un carré parfait, $2n$ ne peut pas en être un.

Exercice 11 – Raisonnements par contraposée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère la proposition suivante :

P : “si $\sum_{i=1}^n a_i \geq M$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_i \geq \frac{M}{n}$ ”.

1. La contraposée de P est : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < \frac{M}{n} \implies \sum_{i=1}^n a_i < M$.
2. Démontrons la contraposée de P trouvée à la question 1. En effet, supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i < \frac{M}{n}$. Alors on a

$$\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n \frac{M}{n} = \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{M}{n} n = M.$$

La contraposée, et donc la proposition, est vraie.