

Feuille 3 : Bases de logique Éléments de correction – Parties B et C

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Expressions avec des quantificateurs et leurs négations

1. a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$.
b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2, n^2 = m^2 + p^2$.
c) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2, n^2 = m^2 + p^2$.
d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n < m$.
e) $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$.
2. a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \neq m^2$.
b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, n^2 \neq m^2 + p^2$.
c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, n^2 \neq m^2 + p^2$.
d) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \geq m$.
e) $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$.

Exercice 7 – Quantificateurs et fonctions nulles... ou pas !

1. a) P et Q sont équivalentes : les fonctions f et g sont toutes les deux nulles.
b) P et Q ne sont pas équivalentes :
 - P : en chaque réel, f et g s'annulent soit simultanément, soit seulement une des deux. Elles ne sont pas forcément nulles.
 - Q : au moins une des deux fonctions f ou g est nulle.
2. Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 8 – Carré et parité

1. • Raisonnons par contraposée : Supposons que n est impair. Alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$. Ainsi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Comme $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$, alors n^2 est impair. Finalement, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
 - Si n est pair, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$. D'où $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Comme $(2k^2) \in \mathbb{Z}$, alors n^2 est pair.
2. On vient de démontrer que n^2 pair $\Leftrightarrow n$ pair. Par contraposée, on a donc n^2 impair $\Leftrightarrow n$ impair.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Tautologie

Soient P, Q des propositions, on a alors

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \text{ et } Q)) \iff P \Rightarrow (\text{non}(Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q)) \iff \text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q).$$

Sa négation est donc $P \text{ et } Q \text{ et } (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$, équivalente à $(P \text{ et } Q \text{ et } \text{non}(P)) \text{ ou } (P \text{ et } Q \text{ et } \text{non}(Q))$ qui est toujours fausse par propriété du "et", car $P \text{ et } \text{non}(P)$ (idem avec Q) est toujours fausse. On en déduit donc que la proposition de départ est toujours vraie, c'est donc une tautologie.

Alternativement, on pourra faire une table de vérité.

Exercice 10 – Implications et équivalences

1. Pour tout réel $x : (x - 1)(x + 2) = (x - 1)(3x + 5) \iff x + 2 = 3x + 5$
2. Pour tout réel $x \neq 1 : (x - 1)(x + 2) = (x - 1)(3x + 5) \iff x + 2 = 3x + 5$

3. Aucun des choix ne convient puisque cela dépend du signe de $x - 2$.

4. Pour tout réel $x > 2$: $\frac{2x-3}{x-2} > 1 \iff 2x-3 > x-2$

Exercice 11 – Raisonnement par négation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. La négation de cette proposition est $(\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon)$ et $x > 0$.
2. Si $x > 0$, alors pour $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ et on a $x > \varepsilon$, donc la négation donnée à la question précédente est nécessairement fausse, le premier prédicat étant faux. On en déduit donc que la propriété de départ est vraie.
3. La contraposée de la proposition est : $x > 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, x > \varepsilon)$.
Soit $x > 0$, alors pour $\varepsilon = \frac{x}{2}$, on a bien $x > \frac{x}{2}$ et la contraposée, donc la proposition, est démontrée.

Exercice 12 – Quantificateurs et négation

1. La négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
C'est la négation qui est vraie : soit $x \in \mathbb{R}$, alors en choisissant $y = -x$, on obtient $x + y = 0 \leq 0$.
2. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
C'est la négation qui est vraie : en choisissant $x = -2$ et $y = -3$, on a bien $x + y \leq 0$.
3. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
C'est la proposition initiale qui est vraie : soit $x \in \mathbb{R}$, alors en choisissant $y = -x + 1$, on obtient $x + y = 1 > 0$.
4. La négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$.
C'est la proposition initiale qui est vraie, c'est-à-dire que sa négation est fausse : soit $x = -1 \in \mathbb{R}$, alors il n'existe aucun $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 \leq -1$ car $y^2 \geq 0$.