

Feuille 3 : Bases de logique

A. Exercices standards

Exercice 1 – Table de vérité, négation et équivalence de prédicats

Soient P, Q, R des prédicats.

1. a) Ecrire la table de vérité de $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ et celle de $(P \text{ ou } \text{non } Q)$.
b) Ecrire la table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$ ou $((\text{non } R) \text{ et } P)$.
2. Montrer que :
a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ équivaut à $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.
b) $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ équivaut à $(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 2 – Implication et divisibilité

On dit que $m \in \mathbb{Z}^*$ divise $n \in \mathbb{Z}$ si : $\exists k \in \mathbb{Z}, n = km$.

Soient a et b deux entiers naturels. On considère les deux assertions P et Q définies par :

$$P : (a \text{ divise } b) \Rightarrow (a^2 \text{ divise } b) \quad \text{et} \quad Q : (a^2 \text{ divise } b) \Rightarrow (a \text{ divise } b).$$

- a) Donner la négation de P , ainsi que celle de Q .
- b) Lesquelles des propositions $P, Q, (\text{non } P), (\text{non } Q)$ sont-elles vraies ?

Exercice 3 – Quantificateurs et négation

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$
- 3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$
- 4) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$

Exercice 4 – Implications et équivalences

1. Compléter les pointillés ci-dessous par le symbole mathématique approprié (implication ou équivalence)
a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \dots \dots \dots x = 2$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 3 \dots \dots \dots x^2 \geq 9$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \pi \dots \dots \dots \cos(x) = -1$
2. Les propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 3$ b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
c) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } x < \sqrt{x}$

Exercice 5 – Condition nécessaire, condition suffisante

Soit P et Q deux propositions. Traduire les propositions suivantes à l'aide des symboles mathématiques.

1. Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie
2. Pour que P soit vraie, il suffit que Q soit vraie
3. La proposition Q est une condition suffisante de la proposition P .
4. Pour qu'un réel x soit supérieur à 2, il suffit que $x > 4$.
5. Pour qu'un réel x soit supérieur à 2, il est nécessaire que $x > 0$.
6. Pour que $x^2 = 1$ il faut et il suffit que $x = 1$ ou $x = -1$.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Expressions avec des quantificateurs et leurs négations

- Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes définies sur $\mathbb{N}$:
 - Tout entier est le carré d'un entier.
 - Tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.
 - Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.
 - Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.
 - L'entier n est impair.
- Exprimer la négation de ces propositions

Exercice 7 – Quantificateurs et fonctions nulles... ou pas !

- Dans chacun des cas suivants, les propositions P et Q sont-elles équivalentes ?
 - $P : \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0) ; Q : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
 - $P : \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0) ; Q : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
- Donner un exemple de fonctions f et g , toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Exercice 8 – Carré et parité

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Montrer que : n^2 pair $\implies n$ pair. La réciproque est-elle vraie ?
- En déduire que : n^2 impair $\iff n$ impair.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Tautologie

Soient P, Q des propositions. Montrer que $P \implies (Q \implies (P \text{ et } Q))$ est une tautologie.

Exercice 10 – Implications et équivalences

Compléter si cela est possible avec $\implies$ ou $\iff$:

- Pour tout réel $x : (x - 1)(x + 2) = (x - 1)(3x + 5) \dots\dots\dots x + 2 = 3x + 5$
- Pour tout réel $x \neq 1 : (x - 1)(x + 2) = (x - 1)(3x + 5) \dots\dots\dots x + 2 = 3x + 5$
- Pour tout réel $x \neq 2 : \frac{2x - 3}{x - 2} > 1 \dots\dots\dots 2x - 3 > x - 2$
- Pour tout réel $x > 2 : \frac{2x - 3}{x - 2} > 1 \dots\dots\dots 2x - 3 > x - 2$

Exercice 11 – Raisonnement par négation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la proposition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \implies x \leq 0.$$

- Exprimer la négation de cette proposition.
- Montrer cette proposition.
- Redémontrer cette proposition en utilisant un raisonnement par contraposée.

Exercice 12 – Quantificateurs et négation

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

- | | |
|--|--|
| 1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ | 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ |
| 3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ | 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$. |