

Feuille 1 : Calculs de base

A. Exercices standards

Exercice 1 – Sommes, produits, fractions, puissances et racines

Soit x et y des réels et n un entier naturel ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) (125)^{-2/3} & 2) \frac{(-2)^3 \cdot 4^6}{8 \cdot (-4)^2} & 3) \sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} & 4) -\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 9\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
 5) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{6 - \frac{2}{5}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{2}} & 6) \left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^2 & 7) -2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} & 8) 5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} \\
 9) \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} & 10) \frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 & 11) \frac{2^{2^n}}{2} \cdot (-2)^{2n-3} \cdot (2^n)^{-2}
 \end{array}$$

Exercice 2 – Identités remarquables

Soient x, y et z trois réels. Développer les expressions de 1) à 3), factoriser celles de 4) à 5) et simplifier celles de 6) à 8).

$$\begin{array}{lll}
 1) (x+y)^2 + (x-y)^2 & 2) 3(-4x+y)^2 - 2(x-5y)^2 & 3) (x+y+z)^2 \\
 4) x^7 - 128 & 5) x^9 + 1 & 6) \frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} \\
 7) \frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}} & 8) \frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}
 \end{array}$$

Exercice 3 – Simplifications avec des racines carrées

Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 1) A = 4\sqrt{54} - 3\sqrt{96} + 2\sqrt{24} & 2) B = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\
 3) C = \frac{2}{3-\sqrt{7}} & 4) D = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2
 \end{array}$$

Exercice 4 – Signes, puissances et simplification

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Simplifier l'expression suivante :

$$A_n = \left(\frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1}}{x^n(1+x)} + \frac{x^2 - x + 1}{x^{n+1}(x^3+1)} \right)^{-\frac{1}{n+1}}$$

Exercice 5 – Formule de Brahmagupta et approximation d'une racine carrée

Dans cet exercice, on considère $(a, b, c, d, n) \in (\mathbb{N}^*)^5$.

1. Montrer la formule suivante, attribuée au mathématicien indien Brahmagupta (598–670) :

$$(a^2 - nb^2)(c^2 - nd^2) = (ac + nbd)^2 - n(ad + bc)^2.$$

2. On suppose maintenant que $a = c$, $b = d$ et $a^2 - nb^2 = 1$. Montrer que l'on a alors

$$\sqrt{n + \frac{1}{4b^2(1+nb^2)}} = \frac{1+2nb^2}{2b\sqrt{1+nb^2}}$$

3. Soit $n = 3$. Déterminer des entiers (a, b, c, d) vérifiant les hypothèses de la question 2. et en déduire une approximation de $\sqrt{3}$ par un certain nombre rationnel que l'on déterminera.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Identité avec des radicaux

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$ deux réels, montrer que

$$\sqrt{x + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{y + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}^3.$$

Exercice 7 – Histoires de carrés

Soient a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Montrer que $a = b = c = d$.

Indication : on pourra développer $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2$.

Exercice 8 – Identité de Gauss

Soient a, b et c trois réels. Montrer que si $a + b + c = 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Fractions

Calculer les expressions suivantes :

$$1) -\frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{5}{12}$$

$$2) -3 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$$

$$3) \frac{\frac{2}{3}}{4} - \frac{3}{\frac{5}{7}} + \frac{1}{30}$$

$$4) \frac{54}{157} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 - 2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

$$5) \frac{1}{\frac{4}{5}} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(2 - \frac{1}{8} \right)^2}{\left(\frac{1}{3} - 1 \right)^3}$$

Exercice 10 – Puissances

Calculer les expressions suivantes :

$$1) \frac{27^{-1} \cdot 4^2}{3^{-4} \cdot 2^4}$$

$$2) ((-2)^3 + (-5)^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$3) \frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$$

$$4) \frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$$

$$5) \frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$$

Exercice 11 – Racines carrées

Ecrire plus simplement les expressions suivantes (calcul, dénominateur entier) :

$$1) \sqrt{(-5)^2} - \sqrt{5^2}$$

$$2) \sqrt{(3 - \pi)^2}$$

$$3) (3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$$

$$4) \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$5) \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Exercice 12 – Identités remarquables

Soient x, y, z et t quatre réels tels que les expressions suivantes soient bien définies. Simplifier :

$$1) \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} + 1$$

$$2) (xt + yz)^2 + (xz - yt)^2 - (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$$

$$3) \frac{x^3 - 1}{x - 1} - (x - 1)^2$$

$$4) \frac{2x + 3}{\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2}}$$

$$5) \frac{(x + y)^4 - (x - y)^4}{4xy} - 2(x - y)^2$$