

## Feuille 10 : Nombres Complexes - Géométrie et équations

### A. Exercices standards

#### Exercice 1 – Vecteurs du plan complexe

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan  $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$

a)  $z = 1 - i$ ,                      b)  $\bar{z}$ ,                      c)  $z + \bar{z}$ ,                      d)  $z - \bar{z}$ .

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

a)  $\vec{w}$  d'affixe  $2 + i$ ,              b)  $\vec{d}$  d'affixe  $-3 + 2i$ ,              c)  $\vec{w} + \vec{d}$ ,                      d)  $2\vec{w} - \vec{d}$ .

#### Exercice 2 – Ensembles de points du plan complexe

Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

a)  $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$                       b)  $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$                       c)  $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$

#### Exercice 3 – Transformations du plan et nombres complexes

1. Donner les applications de  $\mathbb{C}$  qui représentent les transformations du plan suivantes.

- a) La translation du vecteur d'affixe  $-2 + i$ .
- b) L'homothétie de rapport 3 et de centre  $1 + 2i$ .
- c) La rotation d'angle  $\pi/6$  et de centre 1.
- d) La symétrie centrale du centre  $i$ .

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

a)  $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$ .      b)  $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$ .              c)  $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$ .              d)  $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$ .

3. Déterminer par le calcul l'image de  $2 + i$  par la rotation de centre  $i$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , puis retrouver ce résultat avec un dessin.

#### Exercice 4 – Racines n-ièmes

1. Déterminer les racines carrées de  $1 + i$ .

2. Déterminer les racines carrées de  $9 + 40i$ .

3. Déterminer les racines 5-ièmes de  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

4. Déterminer les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^3 = -i$ .

5. Soit  $n \geq 2$  un entier. Déterminer les solutions de l'équation  $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$ .

#### Exercice 5 – Equations dans $\mathbb{C}$

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z$ , dans  $\mathbb{C}$  :

a)  $2z^2 - z - 1 = 0$ ;                      b)  $z^2 + z + 1 = 0$ ;                      c)  $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$ ;  
d)  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ .

---

## B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

### Exercice 6 – Equations dans $\mathbb{C}$

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z$ , dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{lll} a) z^3 + 3z - 2i = 0, & b) z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0, & c) \bar{z}^7 = \frac{1}{z^2} \\ d) z^5 - z = 0, & e) 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0. & \end{array}$$

### Exercice 7 – Racines $n$ -ième et rotation

1. Donner les formes algébrique et exponentielle du nombre complexe  $w = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$ .
2. Déterminer l'ensemble  $S_w$  des racines 6-ième du nombre complexe  $w$ .
3. Donner l'expression de la rotation  $f$  centrée en 0 et d'angle  $-\frac{\pi}{9}$ .
4. Montrer que  $f(S_w)$  est l'ensemble des racines 6-ièmes d'un réel que l'on déterminera.

### Exercice 8 – Transformation complexe

Soit  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

où on pose  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$

1. Montrer que, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ , on a  $|f(z)| < 1$ .  
(Indication : on pourra montrer que  $|z - i|^2 < |z + i|^2 \iff \operatorname{Im} z > 0$ )  
A partir de maintenant, on considère l'application  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{D}$  définie par  $F(z) = f(z)$ , où on pose  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .
2. Soient  $z_1, z_2 \in \mathcal{P}$ . Montrer que  $F(z_1) = F(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ .
3. Soit  $w \in \mathbb{D}$ .
  - i) Déterminer  $z \in \mathbb{C}$  (en fonction de  $w$ ) tel que  $w = F(z)$ .
  - ii) Soit  $z \in \mathbb{C}$  donné par la question précédente.  $\operatorname{Im} z$  est-elle strictement positive ? Justifier votre réponse.
  - iii) L'application  $F$  est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

---

## C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

### Exercice 9 – Ensembles de points du plan

Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

$$\begin{array}{lll} a) |1 + i - z|^2 \geq 2 & b) \operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} & c) \left| \frac{z - 3}{z + 3} \right| < 2 \end{array}$$

### Exercice 10 – Transformations du plan

Soit  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  l'homothétie de rapport 2 et de centre  $1 - i$  et  $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la rotation de centre  $-2$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Déterminer l'expression de  $h \circ r$ , puis de  $r \circ h$ .

### Exercice 11 – Racines $n$ -ièmes

1. Déterminer les racines carrées de  $i - 1$ , puis de  $7 + 24i$ .
2. Déterminer les racines 4-ièmes de  $16i$ , puis de  $\frac{1}{\sqrt{3} - i}$ .

### Exercice 12 – Equations dans $\mathbb{C}$

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z$ , dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{ll} a) 3z^2 - \sqrt{8}z + 1 = 0 & b) (1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0 \\ c) z^4 + z^2 + 1 = 0. & \end{array}$$